جمهورية العراق
وزارة التربية
المديرية العامة للمناهج

الرياضيات

للصف الخامس الأدبي

تأليف

د. عبد علي حمودي الطائي

د. مهدي صادق عباس   د. طارق شعبان رجب الحديثي

محمد عبد الغفور الجواهري   حسام علي حيدر

صباح علي مراد   سعد محمد حسين البغدادي

نظير حسن علي

الطبعة العاشرة   ١٤٣٩هـ - ٢٠١٨ م

المشرف العلمي على الطبع

مروة فليح حسن

المشرف الفني على الطبع

شيماء قاسم جاسم



الموقع والصفحة الرسمية للمديرية العامة للمناهج





استناداً الى القانون يوزع مجاناً ويمنع بيعهُ وتداولهُ في الأسواق

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمــة

تعنى وزارة التربية بإِعادة النظر في الكتاب المدرسي من حين إلى آخر وتعديله حيناً آخر واستبداله حيناً آخر وفق ما تقرره لجان مختصة تؤلف لهذا الغرض . وتلقى كتب الرياضيات نصيبها الوافي من هذه العناية.

وهذا الكتاب الثاني من سلسلة كتب الرياضيات للمرحلة الإِعدادية للفرع الأدبي ، وقد رتبنا هذا الكتاب باربعة فصول ، يبدأ الفصل الأول بموضوع اللوغاريتمات، والفصل الثاني ندرس فيه موضوع المتتابعات، أما الفصل الثالث فيتناول موضوع المصفوفات والمحددات،وينتهي الكتاب بموضوع الإِحصاء .

لقد تم وضع هذا الكتاب وفقاً للمنهج الدراسي المقرر وحاولنا إن نستخدم الطرق التربوية الحديثة فقمنا بهذا المجهود واضعين نصب أعيننا شرح كل مادة من مواده شرحاً يقربها من الافهام وتوخينا الإِكثار من التمارين العملية التي يصادفها الطالب في حياته العملية ، ومتدرجة من السهل إلى الصعب .

وختاماً نرجو إن نكون قد وفقنا إلى خدمة أبنائناالطلبة ، ونرجو من إخواننا المدرسين أن يوافونا بملاحظاتهم حول هذا الكتاب لكي نتلافى النقص فيه والكمال لله وحده.

المؤلفون

المحتـــــويات

الفصل الأول : اللوغاريتمات

الفصل الثاني : المتتابعات

المحتـــــويات

الفصل الثالث : المصفوفات والمحددات

المحتــــويات

الفصل الرابع : الإحصاء

الفصل الاول
CHAPTER 1

اللوغاريتمـــــات

نبذة مختصرة عن اللوغاريتمات

اكتشفت اللوغاريتمات في اوائل القرن السابع عشر ، لاهميتها في تبسيط الحسابات المعقدة للعلوم الطبيعية والهندسية . واللوغاريتمات اساسية في الحسابات التجارية والفكرة القائمة عليها اللوغاريتمات هي تحويل الاعداد على شكل أس والتعامل معها عوضاً عن الاعداد الاصلية .

وفيما يلي بعض استخدامات اللوغاريتمات :-

- استخدامه في قياس قوة الزلزال على مقياس ريختر .
- يصف الرقم الهيدروجيني للمادة (pH) درجة حموضة المادة والتي تحسب باستخدام اللوغاريتمات للاساس 10 حيث الرقم الهيدروجيني ($pH = -\text{Log}(H^+)$)

  H^+ تركيز ايون الهيدروجين في المادة
- يستخدم في قياس شدة الصوت (L) بالديسيبل حيث

  $L = 10 \text{ Log } \frac{a}{a_\circ}$ حيث a : شدة الصوت

  $a_\circ$: اقل شدة للصوت تستطيع اذن انسان عادي ان تميزه
- حساب سرعة الصواريخ (V) حيث

$$V = -0.0098 N + v_0 \text{Ln}(R)$$

N : زمن اشتعال وقود المحرك

v_0 : سرعة انطلاق البخار

R : نسبة كتلة الصاروخ محمل بالوقود الى كتلته بدون وقود

Ln : اللوغاريتم الطبيعي



- في الاحصاء يستخدم في :

حساب الفائدة المركبة المستمرة **a** حيث

$$a = M e^{R \times N}$$

M : المبلغ المستثمر

R : الفائدة

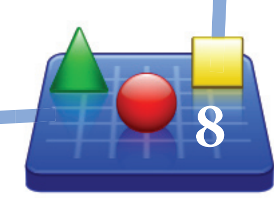
N : عدد السنوات

- حساب الوسط الهندسي

$$\text{Geometric Mean} = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \ldots\ldots X_n}$$

في البنود اللاحقة سندرس اللوغاريتمات العشرية والطبيعية.

البيئة بيتنا الكبير ... فلنعمل على جعله صحياً ونظيفاً.



الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية
Exponential and Logarithmic Functions

تواصل الموضوع

لقد تعرفنا فيما سبق على الدالة الحقيقية والان سندرس انواع اخرى من الدوال مثل الدالة الاسية والدالة اللوغاريتمية

[1 - 1] الدالة الأسية Exponential Function

لناخذ الدالة الحقيقية $f: R \longrightarrow R^+$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = 2^x$

الجدول (1 - 1) يعطينا بعض الازواج المرتبة لبيان الدالة f

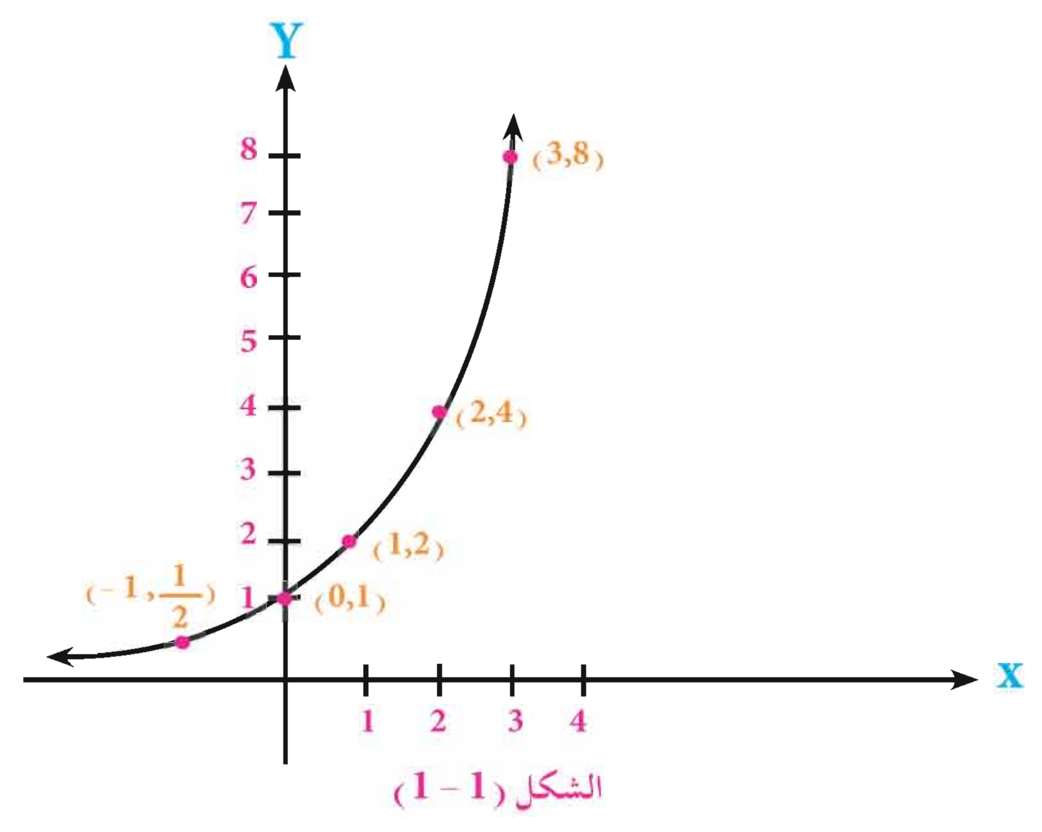
x	3	2	1	0	-1	-2	-3
f (x)	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

الجدول (1 - 1)

ان كل زوج مرتب (x ، 2^x) يعين نقطة في المخطط البياني للدالة f . وبتمثيل الازواج المرتبة في المستوي الاحداثي نحصل على الشكل (1 - 1) الذي يمثل جزءاً من التمثيل البياني للدالة

$f(x) = 2^x$





الشكل (1 − 1)

من هذا الشكل يمكننا تحديد قيمة تقريبية للدالة $f(x) = 2^x$ عند اي قيمة معلومة للمتغير x، وبالعكس.

فمثلاً: عندما $x = 1.4$ فمن الشكل نجد ان $2^{1.4} = 2.7$ تقريباً

واذا كان $2^x = 6.2$ فمن الشكل نجد ان $x = 2.65$ تقريباً

ان مثل هذه الدالة تسمى دالة اسية وتعرف كما يلي:

تعريف (1 − 1)

اذا كان $a > 0$ ، $a \neq 1$ فان الدالة:

$$f : R \Longrightarrow R^+ \quad \text{حيث} \quad f(x) = a^x ,\ \forall x \in R$$

حيث $f(x) = a^x$ تسمى الدالة الأسية للاساس a

سنقبل بأن الدالة الأسية تقابل.

ملاحظة

اذا كان $a = 1$ فان $f(x) = 1^x = 1$ دالة ثابتة وهذا ما جعلنا نقول $a \neq 1$



[2 – 1] الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

تواصل الموضوع

لقد درسنا سابقاً الدالة الأسية $f(x) = a^x$ حيث $f: R \Longrightarrow R^+$ وبما أن لكل دالة تقابل دالة عكسية فإن للدالة الأسية دالة عكسية f^{-1} . وهي دالة تقابل

$$f^{-1}: R^+ \Longrightarrow R$$

فمجالها R^+ هو المجال المقابل للدالة الأسية ، ومجالها المقابل R **Codomain** هو مجال **Domain** الدالة الأسية والتي هي تقابل ايضاً والتي تسمى بالدالة اللوغاريتمية .

تعريف (2 – 1)

يرمز للدالة العكسية للدالة $y = a^x$

بالرمز $x = Log_a\, y$ ونقول ان x هو لوغاريتم y للاساس a ويمكننا ان نكتب العلاقة الآتية

$$x = Log_a\, y \Longleftrightarrow y = a^x$$

حيث $y \in R^+ \ ,\ x \in R$

مثال 1

اكتب $5^3 = 125$ بالصورة اللوغاريتمية .

الحل

$5^3 = 125$ يكافئ $y = a^x$ صورة أسية

$x = Log_a\, y$ يكافئ $Log_5 125 = 3$

مثال 2

اكتب $Log_2\, 32 = 5$ بالصورة الأسية

الحل

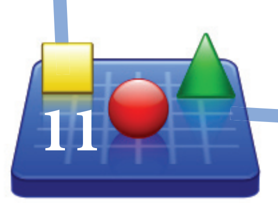
$Log_a\, y = x$ يكافئ $Log_2 32 = 5$ صورة لوغاريتمية

$y = a^x$ يكافئ $32 = 2^5$ صورة أسية



اكتب الصورة المكافئة لكل مما يأتي :

$(0.01)^2 = 0.0001$ ، $Log_5 1/25 = -2$ ، $7^3 = 343$ ، $Log_{10} 10000 = 4$



[3 – 1] خواص الدالة اللوغاريتمية

من خواص الدالة اللوغاريتمية ما يلي :

(a) لكل عدد حقيقي موجب لوغاريتم، وليس للاعداد الحقيقية السالبة والصفر لوغاريتمات حقيقية .

(b) بما ان الدالة اللوغاريتمية تقابل فان :

$$\text{Log}_a x = \text{Log}_a y ،\ x, y \in R^+ \Longleftrightarrow x = y$$

(c) لما كان $a \neq 1$ ، $a > 0$ فلكل $x ، y \in R^+$ سنقبل القواعد الاتية بدون برهان :

(1) $\text{Log}_a xy = \text{Log}_a x + \text{Log}_a y$

(2) $\text{Log}_a \frac{x}{y} = \text{Log}_a x - \text{Log}_a y$

(3) $\text{Log}_a x^n = n\text{Log}_a x$ ، حيث $n \in R$

(4) $\text{Log}_a a = 1$

(5) $\text{Log}_a 1 = 0$

مثال 3

أثبت ان $\text{Log}_2 (\frac{17}{5}) - \text{Log}_2 (\frac{34}{45}) + 2\,\text{Log}_2 (\frac{2}{3}) = 1$

الحل

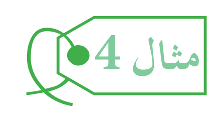
الطرف الايسر : $\text{Log}_2 (\frac{17}{5}) - \text{Log}_2 (\frac{34}{45}) + \text{Log}_2 (\frac{2^2}{3^2})$

$= \text{Log}_2 \frac{17}{5} \times \frac{45}{34} \times \frac{4}{9}$

$= \text{Log}_2 2$

$= 1$ الطرف الايمن

(و . هـ.م)



جد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(a) $\text{Log}_3 x = 4$

(b) $\text{Log}_x 64 = 6$

(c) $\text{Log}_5 \dfrac{1}{125} = x$

الحل

(a) $\text{Log}_3 x = 4 \Longrightarrow x = 3^4 \Longrightarrow x = 81$

$\therefore S = \{81\}$

(b) $\text{Log}_x 64 = 6 \Longrightarrow 64 = x^6 \Longrightarrow 2^6 = x^6 \Longrightarrow x = \mp 2$

$\because x = 2 \in R^+$

$\therefore S = \{2\}$

(c) $\text{Log}_5 \dfrac{1}{125} = x \Longrightarrow \dfrac{1}{125} = 5^x \Longrightarrow 5^{-3} = 5^x$

$\therefore x = -3$

$\therefore S = \{-3\}$

تمارين [1 - 1]

س1 / فيما يلي علاقات غير صحيحة دائما ، مثلاً اعط $y = a$ ، $x = a$ وبين ذلك .

(a) $\text{Log}_a (x + y) \neq \text{Log}_a x + \text{Log}_a y$

(b) $\text{Log}_a (x - y) \neq \dfrac{\text{Log}_a x}{\text{Log}_a y}$

(c) $\text{Log}_a xy \neq \text{Log}_a x \ \text{Log}_a y$

(d) $\text{Log}_a x^2 \neq (\text{Log}_a x)^2$

س2 / جد قيمة x :

(a) $\text{Log}_{10} 0.001 = x$

(b) $\text{Log}_x \dfrac{1}{8} = -3$

(c) $\text{Log}_{10} x = 5$

س3 / جد قيمة ما يأتي :

(a) $\text{Log}_{10} (\dfrac{40}{9}) + 4\,\text{Log}_{10} 5 + 2\,\text{Log}_{10} 6$

(b) $2\text{Log}_{10} 8 + \text{Log}_{10} 125 - 3\,\text{Log}_{10} 200$

(c) $\text{Log}_a (x^2 - 1) - 2\,\text{Log}_a (x - 1) + \text{Log}_a \dfrac{(x-1)}{(x+1)}$

(d) $\text{Log}_2 8 - \text{Log}_3 27 - \text{Log}_5 625$

س4 / اذا كانت $\text{Log}_{10} 3 = 0.4771$ ، $\text{Log}_{10} 2 = 0.3010$ جد قيمة :

(a) $\text{Log}_{10} 0.002$

(b) $\text{Log}_{10} 3000$

(c) $\text{Log}_{10} 12$

س5 / حل المعادلات الآتية :

(a) $\text{Log}_3 (2x-1) + \text{Log}_3 (x+4) = \text{Log}_3 5$

(b) $\text{Log}_2 (3x+5) - \text{Log}_2 (x-5) = 3$



[4 – 1] اللوغاريتمات العشرية Decimal – Logarithms

تواصل الموضوع

سبق وان درسنا اللوغاريتم لاي اساس $1 \neq a$ ، $a > 0$

والان سنتعرف على لوغاريتم اساسه $a = 10$. يسمى اللوغاريتم العشري (اللوغاريتم الاعتيادي) . وقد اتفق على عدم كتابة الاساس (10) حين استعماله . حيث $Log_{10}\, y$ يكتب بشكل $Log\, y$

فمثلاً : $Log_{10}7$ يكتب بشكل $Log7$ وكذلك $Log_{10}\, 0.05$ يكتب بشكل $Log\, 0.05$ ومن المفيد هنا ان نذكر بعض اللوغاريتمات للقوى الصحيحة للعدد 10 معتمدين على : $Log\, 10^{n} = n$

n	← –	−3	−2	−1	0	1	2	3	+ →
$Log10^{n}$	....	−3	−2	−1	0	1	2	3	

فمثلاً : $Log\, 10^{4} = 4$ ، $Log\, 10^{7} = 7$ .....

$Log\, 0.00001 = Log\, 10^{-5} = -5$ ، $Log\, 0.01 = Log\, 10^{-2} = -2$ .....

[1 – 5] اللوغاريتمات الطبيعية Natural Logarithms

تواصل الموضوع

تعرفت على اللوغاريتمات العشرية حيث كان الاساس $a = 10$

والان سنتعرف على اللوغاريتمات التي اساسها $a = e \simeq 2.71828$

والتي تسمى باللوغاريتمات الطبيعية والتي تكتب بشكل

$\ln y$ حيث $e = a = 2.71828$

اذا وضعنا ، $a = e$ في تعريف (2 – 1) فنحصل على

$$y = e^x \Longleftrightarrow x = \ln y$$

ملاحظة

للاطلاع

$e = 2.718281828459045$

ويمكن ايجادها بالعلاقة

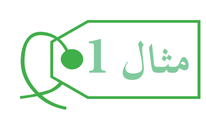
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n \quad \text{or} \quad \lim_{n \to \infty} \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots \frac{1}{n!}\right)$$

نتيجة 1

$$\ln(e^x) = x ، \forall x \in R$$

البرهان

$$\ln e^x = x \ln e$$
$$= x \times 1$$
$$= x$$



جد قيمة x اذا علمت ان

$$e^{2x-1} = 8$$

الحل نأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

$\ln e^{2X-1} = \ln 8$ وحسب النتيجة (1)

$$\therefore 2X - 1 = \ln 8$$
$$2X = 1 + \ln 8$$
$$\therefore X = \frac{(1 + \ln 8)}{2}$$



(تبديل الاساس)

$$\forall \ a > 0 ، a \neq 1$$
$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

أو يمكن أن يكتب بالشكل :

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

البرهان

الطرف الايسر

نفرض (1) .... $x = a^y \Longleftrightarrow y = \log_a x$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفي العلاقة (1)

$$\ln x = \ln a^y$$

$$\ln x = y \ln a$$

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$ الطرف الأيمن

وبنفس الطريقة وبأخذ اللوغاريتم العشري لطرفي العلاقة (1) نستنتج إن : $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$

مثال 2

ما قيمة $\frac{1}{\log_5 15} + \frac{1}{\log_3 15}$

الحل

باستخدام نتيجة (2)

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{\ln 15}{\ln 3}} + \frac{1}{\frac{\ln 15}{\ln 5}}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln 3}{\ln 15} + \frac{\ln 5}{\ln 15}$$

$$\Rightarrow \frac{(\ln 3 + \ln 5)}{\ln 15}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln 15}{\ln 15} = 1$$

[6 – 1] استخدام الآلة الحاسبة

تواصل الموضوع

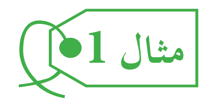
بعد دراستنا للوغاريتمات الطبيعية والعشرية وبعض قوانين اللوغاريتمات ، الان سندرس كيفية استخدام الحاسبة Calculator لايجاد لوغاريتم عدد ولوغاريتمات الاعداد المقابلة وكتطبيق كما درسناه سابقاً .



اولاً : ايجاد لوغاريتم العدد

(1) في حالة اللوغاريتمات العشرية : (Log)

○ نكتب العدد المراد إيجاد لوغاريتمه ثم نضغط على المفتاح Log فيظهر الناتج .



جد :

(a) Log 7 ، (b) Log 13 ، (c) Log 0.08 ، (d) Log 1.5

الحل

(a) نكتب 7 ثم نضغط على Log فيكون الناتج 0.84509804

اي Log 7 = 0.84509804

(b) نكتب العدد 13 ثم نضغط Log فيكون الناتج 1.11394335

(c) نكتب العدد 0.08 ثم نضغط Log فيكون الناتج −1.096910013

(d) نكتب العدد 1.5 ثم نضغط Log فيكون الناتج 0.176091259



(2) في حالة اللوغاريتمات الطبيعية :(ln)

❍ نكتب العدد المراد إيجاد لوغاريتمه ثم نضغط على المفتاح ln فيظهر الناتج



جد

(a) $\ln 7$

(b) $\ln 13$

(c) $\ln 0.08$

(d) $\ln 1.5$

الحل

(a) نكتب العدد 7 ثم نضغط على ln فيكون الناتج 1.94510149

(b) نكتب العدد 13ثم نضغط على ln فيكون الناتج 2.564949357

(c) نكتب العدد 0.08 ثم نضغط على ln فيكون الناتج - 2.525728644

(d) نكتب العدد 1.5ثم نضغط على ln فيكون الناتج 0.405465108

ثانياً : إيجاد العدد المقابل اذا علم لوغاريتمهُ

(1) في حالة اللوغاريتمات العشرية :

○ نكتب لوغاريتم العدد (المعطى) ونضغط على مفتاح 2ndF ويكون مغاير للاسود (اصفر ، ازرق...) ثم نضغط على مفتاح Log فيظهر العدد المطلوب.



جد الاعداد المقابلة للاعداد التي لوغاريتماتها العشرية هي :

(a) 0.84509804

(b) 1.113943352

(c) − 1.096910013

(d) 0.176091259

الحل

(a) نكتب 0.84509804 ثم نضغط على 2nd F ثم نضغط على مفتاح Log فيظهر 7

(b) نكتب 1.113943352 ثم نضغط على 2ndF ثم نضغط على مفتاح Log فيظهر 13 ≃ 12.99999999

(c) نضغط مفتاح [−] نكتب 0.096910013 وثم نضغط [=] فيظهر 1.096910013− ثم نضغط 2nd F ثم Log فيظهر 0.08

(d) نكتب 0.176091259 نضغط على 2nd F ثم Log فيظهر 1.5

ملاحظة

(قارن نتائج مثال (1) مع هذا المثال)



(2) في حالة اللوغاريتمات الطبيعية (ln)

❍ نكتب لوغاريتم العدد (المعطى) ونضغط على مفتاح 2ndF ثم نضغط على مفتاح ln فيظهر العدد المطلوب.



جد الاعداد المقابلة للاعداد التي لوغاريتماتها الطبيعية هي:

(a) 1.945910149

(b) 2.564949357

(c) $^{-}2.525728644$

(d) 0.405465108

الحل

(a) نكتب 1.945910149 ثم نضغط 2ndF ثم مفتاح ln فيظهر 7

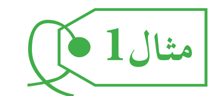
(b) نكتب 2.564949357 ثم نضغط 2ndF ثم مفتاح ln فيظهر 12.99999999 ≃ 13

(c) نضغط [−] نكتب 2.525728644 ثم [=] فيظهر 2.525728644 −

ثم نضغط 2ndF ثم ln فيظهر 0.08

(d) نكتب 0.405465108 نضغط 2ndF ثم ln فيظهر 1.5

امثلة تطبيقية على قواعد اللوغاريتمات (استخدم آلتك الحاسبة)



جد قيمة $Log_8 5$

الحل

بتبديل الاساسات الى اساس 10 يكون (نتيجة 2)

$$Log_8 5 = \frac{Log\ 5}{Log\ 8} = \frac{0.69897}{0.90309} \simeq 0.77397$$



جد قيمة $ln\ 3 + Log\ 3$

الحل

$$Log\ 3 = 0.4771$$
$$ln\ 3 = 1.0986$$
$$\therefore ln\ 3 + Log\ 3$$
$$= 1.0986 + 0.4771$$
$$= 1.5757$$



جد قيمة $Log_5 14 - Log_5 7$

الحل

$$Log_5 14 - Log_5 7$$
$$Log_5 \frac{14}{7}$$

$Log_5 2$ وباستخدام تبديل الاساس

$$\frac{Log\ 2}{Log\ 5} = \frac{0.3010}{0.6989} \simeq 0.4307$$



جد قيمة $x = \sqrt[3]{(65.26)^2}$

الحل

$x = (65.26)^{2/3}$

$\text{Log } x = \frac{2}{3} \text{Log } 65.26$ وباستخدام الآلة الحاسبة

$\text{Log } x = \frac{2}{3} \times 1.8147$

$\text{Log } x = 1.2098$

$x \simeq 16.2106$



حل المعادلة $7^{3x} = 81$

الحل

$7^{3x} = 81$

نأخذ Log_7 للطرفين

$\text{Log}_7 7^{3x} = \text{Log}_7 81 \Longrightarrow 3x \text{ Log}_7 7 = \frac{\text{Log } 81}{\text{Log } 7}$

$3x = \frac{\text{Log } 81}{\text{Log } 7}$ باستخدام الآلة الحاسبة

$3x = \frac{1.9085}{0.8451}$

$3x \simeq 2.2583$

$x \simeq 0.7528$

$\therefore S = \{0.7528\}$



بفرض انك تستثمر (2) مليون دينار بفائدة مركبة سنوية مستمرة قدرها 5.5٪ . اوجد جملة ما ستحصل عليه بعد (5) سنوات .

الحل

قانون حساب الفائدة المركبة المستمرة هو $a = M e^{R \times N}$

حيث M:المبلغ، R : الفائدة ، N: عدد السنوات

$$a = 2000000 \times e^{\frac{55}{1000} \times 5}$$

$a = 2000000 \ e^{0.275}$ باخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

$$\ln a = \ln 2000000 + 0.275 \ \text{Ln} \ e$$

$$\ln a = 14.78365774$$

$$a \simeq 2633061$$



جد الوسط الهندسي للاعداد : 99، 120، 110، 93، 105 .

الوسط الهندسي $\text{Geometric mean} = \sqrt[n]{X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots\ldots \times X_n}$

الوسط الهندسي $= \sqrt[5]{105 \times 93 \times 110 \times 120 \times 99}$

Log (الوسط الهندسي) $= \frac{1}{5}[(\text{Log } 99 + \text{Log } 120 + \text{Log } 110 + \text{Log } 93 + \text{Log } 105)]$

$$= \frac{1}{5}(10.105881)$$

$$= 2.021176$$

باستخدام الآلة الحاسبة لايجاد العدد المقابل نجد ان

الوسط الهندسي = 104.996851

تمارين [1 – 2]

(استخدم آلتك الحاسبة)

س1/ جد قيمة كل من : $\ln 20$ ، $\log_5 11$ ، ، $\log_{10} 8$

س2/ جد قيمة كل مما يأتي :

(a) $2\log_4 58 - \log_7 21$

(b) $\log_6 26 + \log 26 + \ln 26$

س3/ جد قيمة كل مما يأتي :

(a) $\sqrt[4]{0.0562}$ (b) $(11.023)^9$

س4/ حل كلا مما يأتي :

(a) $2^x = 25$ (b) $e^{2x+1} = 10$

س5/ باستخدام قانون الفائدة المركبة $a = M e^{R \times N}$ لاستثمار مليون دينار بفائدة قدرها ٪ 3.5 ولمدة (3) سنوات . جد جملة ما ستحصل عليه .

س6/ جد الوسط الهندسي للاعداد : 4، 82، 90، 89، 71، 60، 88، 96، 84، 93

س7/ اثبت ان :

(a) $\frac{1}{\log_a abc} + \frac{1}{\log_b abc} + \frac{1}{\log_c abc} = 1$

(b) $\log 40/9 + 2(2\log 5 + \log 6) = 5$

س8/ اي مقدار (مقادير) يكافئ المقدار $3\log a + \log b$ ؟

(a) $\log (ab)^3$

(b) $\log a^3 b$

(c) $\log a^3 \times \log b$

(d) $\log a^3 + \log b$

س9/ اختر الاجابة الصحيحة اذا علمت ان $\log a \times b$ هي :

(a) $\log a \times \log b$

(b) $\log a + \log b$

(c) $\log (a + b)$

(d) ليس اي منها

الفصل الثاني

CHAPTER 2

المتتابعات Sequences

[1-2] مقدمة

لقد درسنا كثيراً من المفاهيم (المعلومات) في السنوات السابقة في مادة الرياضيات ولكن مايهمنا استذكاره في هذا الفصل مايأتي:

1) مجموعة الاعداد الصحيحة (**Integers**) الموجبة $Z^+=\{1,2,3,4,...\}$ التي هي نفسها مجموعة الاعداد الطبيعية عدا الصفر (**Natural**) $N^+=\{1,2,3,4,...\}$.

2) معنى الدالة(**Function**) وتمثيل بعض انواع الدوال

3) تكون الدالة معلومة متى ماكان كل من قاعدة اقترانها ومجالها(**Domain**) ومجالها المقابل (**codomain**) معلوماً.

4) تسمى الدالة عددية اذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعات جزئية غير خالية من مجموعة الاعداد الحقيقية (**R**) **Real Numbers** .

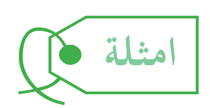
في هذا الفصل سندرس دوالاً من شكل خاص يكون مجالها مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة Z^+ [او نفس المعنى مجموعة الاعدادالطبيعية عدا الصفر N^+] ومجالها المقابل اي مجموعة غير خالية.

تعريف (1-2)

كل دالة مجالها المجموعة Z^+ [او N^+] او مجموعة جزئية من Z^+ بالشكل $\{1,2,3,\dots,n\}$ حيث n عدد طبيعي {صحيح}موجب معين ومجالها المقابل مجموعة جزئية غير خالية تسمى متتابعة «sequense» .

في هذا الفصل سنركز اهتمامنا على دراسة المتتابعات التي يكون مجالها المقابل مجموعات جزئية غير خالية من «R».

بما إن جميع المتتابعات مجالها المجموعة Z^+ او مجموعة جزئية غير خالية فيها بالفعل $\{1,2,3,\dots,n\}$ سوف نهمل ذكر المجال ونكتفي بذكر قاعدة الاقتران فقط .



$U(n)= 2n-5 \quad \forall\ n\in Z^+$] او نقول $\forall\ n\in N^+$ [وأن

$U(1)=2\times1-5= -3$	يسمى الحد الاول للمتتابعة ويرمز له U_1
$U(2)=2\times2-5= -1$	يسمى الحد الثاني للمتتابعة ويرمز له U_2
$U(3)=2\times3-5 =1$	يسمى الحد الثالث للمتتابعة ويرمز له U_3
$U(4)=2\times4-5 = 3$	يسمى الحد الرابع للمتتابعة ويرمز له U_4
$U(5)=2\times5-5 = 5$	يسمى الحد الخامس للمتتابعة ويرمز له U_5
$U(6)=2\times6-5 = 7$	يسمى الحد السادس للمتتابعة ويرمز له U_6

وهكذا $U(n)= 2n-5$ يسمى الحد النوني (الحد n) للمتتابعة ويرمز له بالرمز Un وعليه فإن

$U = \{(1,-3),(2,-1),(3,1),(4,3),(5,5),\dots,(n,2n-5),\dots\}$

او تكتب بالشكل

$U = \{(n,2n-5): \ \forall\ n\in Z^+\}$

ولكن كما ذكرنا اننا سوف نهمل ذكر المجال فلذلك يمكن أن نهمل مجموعة المساقط الاولى ونكتفي بكتابة مجموعة المساقط الثانية

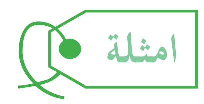
U1,U2,U3,U4,...,Un,...

ولتمييزها عن المجموعات سنكتب حدود المتتابعة بين قوسين من الشكل « $\langle\ \rangle$ » فنكتب المثال السابق كما يأتي :

$\langle Un \rangle = \langle U1, U2, U3, U4, \ldots, Un, \ldots \rangle$

او بالشكل

$\langle -3, -1, 1, 3, \ldots, 2n-5, \ldots \rangle$



اكتب الحدود الستة الاولى لكل من المتتابعات الآتية ثم اكتب المتتابعة بالشكل اعلاه (كما في المثال السابق)

1) $\langle Un \rangle = \langle n^2 \rangle$

الحد الاول $U1 = 1^1 = 1$

الحد الثاني $U2 = 2^2 = 4$

الحد الثالث $U3 = 3^2 = 9$

الحد الرابع $U4 = 4^2 = 16$

الحد الخامس $U5 = 5^2 = 25$

الحد السادس $U6 = 6^2 = 36$

$\langle Un \rangle = \langle U1, U2, U3, U4, U5, U6, \ldots, Un, \ldots \rangle$

$= \langle 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots \rangle$

2) $\langle Hn \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle$

$H1 = 1$

$H2 = \frac{1}{2}$

$H3 = \frac{1}{3}$

$H4 = \frac{1}{4}$

$H5 = \frac{1}{5}$

$H6 = \frac{1}{6}$

$\langle Hn \rangle = \langle H1, H2, H3, H4, \ldots, Hn, \ldots \rangle$

$$= \langle 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots \rangle$$

3) $\langle Un \rangle = 2n + (-1)^n$

$$U1 = 2 \times 1 + (-1)^1 = 2 - 1 = 1$$

$$U2 = 2 \times 2 + (-1)^2 = 4 + 1 = 5$$

$$U3 = 2 \times 3 + (-1)^3 = 6 - 1 = 5$$

$$U4 = 2 \times 4 + (-1)^4 = 8 + 1 = 9$$

$$U5 = 2 \times 5 + (-1)^5 = 10 - 1 = 9$$

$$U6 = 2 \times 6 + (-1)^6 = 12 + 1 = 13$$

$$\langle Un \rangle = \langle U1, U2, U3, \ldots, 2n + (-1)^n, \ldots \rangle$$

$$= \langle 1, 5, 5, 9, 9, \ldots, 2n + (-1)^n, \ldots \rangle$$

4) $U1 = 1 \,,\, U_{n+1} = (n+1) \,.\, Un$

$$U1 = 1$$

$$U2 = 2U1 = 2 \times 1 = 2$$

$$U3 = 3U2 = 3 \times 2 = 6$$

$$U4 = 4U3 = 4 \times 6 = 24$$

$$U5 = 5U4 = 5 \times 24 = 120$$

$$U6 = 6U5 = 6 \times 120 = 720$$

$$\langle Un \rangle = \langle U1, U2, U3, \ldots, (U1 = 1, Un+1 = (n+1) \,.\, Un), \ldots \rangle$$

$$= \langle 1, 2, 6, 24, \ldots, (U1 = 1, Un+1 = (n+1) \,.\, Un), \ldots \rangle$$

ملاحظة (١)

نلاحظ ان المتتابعة $\langle Un \rangle = \langle 2,4,6,8,10,12 \rangle$ تختلف عن المتتابعة $\langle Hn \rangle = \langle 4,2,6,8,10,12 \rangle$
وهذا يعني ان [$H2 \neq U2$ اي ان $U2=4, H2=2$] وكذلك [$H1 \neq U1$ اي ان $U1=2, H1=4$] ان
ترتيب حدود المتتابعة مهم ويؤثر في تغيير المتتابعة اي أن الترتيب يعتبر من الخواص المميزة للمتتابعات .

ملاحظة (٢)

لاحظ الامثلة الآتية

1) $\langle U_n \rangle = \langle n^2 - n \rangle$

$U_1 = 1^2 - 1 = 0$ $\quad\quad$ $U_2 = 2^2 - 2 = 2$

$U_3 = 3^2 - 3 = 6$ $\quad\quad$ $U_4 = 4^2 - 4 = 12$

تعلمنا ان U_1 يسمى الحد الاول للمتتابعة، U_2 حدها الثاني، ... وان $U_n = n^2 - n$ يسمى الحد n (النوني) للمتتابعة ويسمى ايضاً بحدها العام(General Term) اي انه في هذا المثال :

(الحد النوني) = الحد العام = $U_n = n^2 - n$

2) $\langle H_n \rangle = \langle 2^{n-1} \rangle$

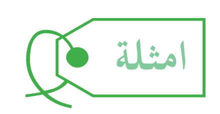
$H_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1$, $H_2 = 2^{2-1} = 2$

$H_3 = 2^{3-1} = 2^2 = 4 \ldots$

والحد العام للمتتابعة هو $H_n = 2^{n-1}$

ملاحظة (٣)

المتتابعة التي يكون مجالها مجموعة جزئية غير خالية من (Z^+) وبالشكل $\{1,2,3,\ldots, n\}$ مرتبة تصاعدياً ابتداً بالعدد (1) الى العدد المعيّن (n) تسمى متتابعة منتهية(Finite Sequence) اما التي مجالها (Z^+) تسمى متتابعة غير منتهية (Infinite Seqence).



1) $U : \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow R$

معرّفة كما يأتي $U_n = 2n - 9$

تكتب بذكر حدودها بالشكل

$\langle U_n \rangle = \langle -7, -5, -3, -1, 1, 3 \rangle$

$= \langle U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6 \rangle$

حيث حدها الاول $U_1 = -7$ وحدها الاخير $U_6 = 3$ وعدد حدودها $n = 6$



$2)\ H : \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \longrightarrow R$

معرّفة كما يأتي $Hn = \frac{n+1}{n}$

$H1 = \frac{1+1}{1} = 2$ $\quad$ $H2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$

$H3 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$ $\quad$ $H4 = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$

$H5 = \frac{5+1}{5} = \frac{6}{5}$ $\quad$ $H6 = \frac{6+1}{6} = \frac{7}{6}$

$H7 = \frac{7+1}{7} = \frac{8}{7}$ $\quad$ $H8 = \frac{8+1}{8} = \frac{9}{8}$

$H9 = \frac{9+1}{9} = \frac{10}{9}$ $\quad$ $H10 = \frac{10+1}{10} = \frac{11}{10}$

$$\langle Hn \rangle = \langle H1 , H2 , H3 , H4 , H5 , H6 , H7 , H8 , H9 , H10 \rangle$$

$$= \langle 2 , \frac{3}{2} , \frac{4}{3} , \frac{5}{4} , \frac{6}{5} , \frac{7}{6} , \frac{8}{7} , \frac{9}{8} , \frac{10}{9} , \frac{11}{10} \rangle$$

حدها الاول $H1 = 2$

حدها الاخير $H10 = \frac{11}{10}$

عدد حدودها $n = 10$

[2 – 2] التمثيل البياني للمتتابعة :

بما ان المتتابعات موضوع دراستنا هي دوال عددية مجالها أما Z^+ او مجموعة بالشكل $\{1,2,3,4 \ , \ldots , \ n\}$ بشرط أن (n) عدداً صحيحاً موجباً معين وإنه يمكن تمثيل المتتابعات باشكال بيانية وكما موضح في الامثلة الآتية :



مثل الاشكال البيانية لكل من المتتابعات الاتية :

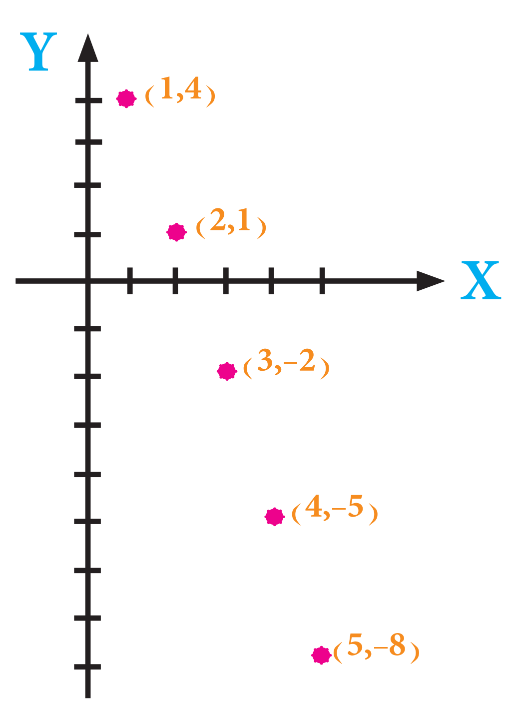
1) $\langle U_n \rangle = \langle 7 - 3n \rangle$

لتمثيل المتتابعة بيانيا نكتب عدداً معقولاً من حدودها ابتداءاً من الحد الاول ثم نرسم محوري الاحداثيات [محور السينات x − axis ومحور الصادات y − axis] ونعين المجال على محور السينات ونعتبر المجال المقابل «R» [اذا لم يذكره] والذي يعين على محور الصادات فنقول :

$U_1 = 4 , U_2 = 1 , U_3 = -2 , U_4 = -5 , U_5 = -8$

ونعين النقط

$(1,4) , (2,1) , (3,-2) , (4,-5) , (5,-8)$

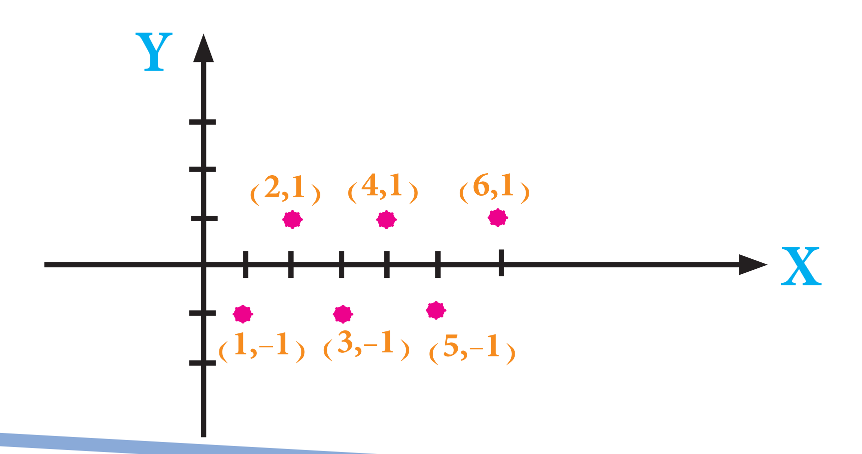


2) $\langle H_n \rangle = \langle (-1)^n \rangle$

$H_1 = -1 , H_2 = 1 , H_3 = -1 , H_4 = 1 , H_5 = -1 , H_6 = 1$

ونعين النقط

$(1,-1) , (2,1) , (3,-1) , (4,1) , (5,-1) , (6,1)$



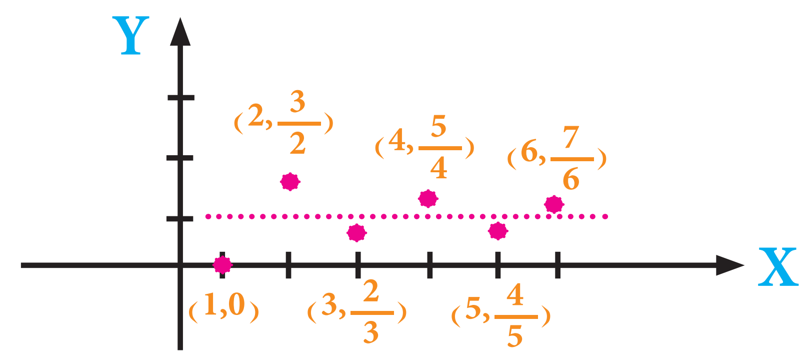
$3)\ \langle G_n \rangle = \langle 1 + \frac{(-1)^n}{n} \rangle$

$G_1 = 1 - 1 = 0$ $\quad G_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$G_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $\quad G_4 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$G_5 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ $\quad G_6 = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$

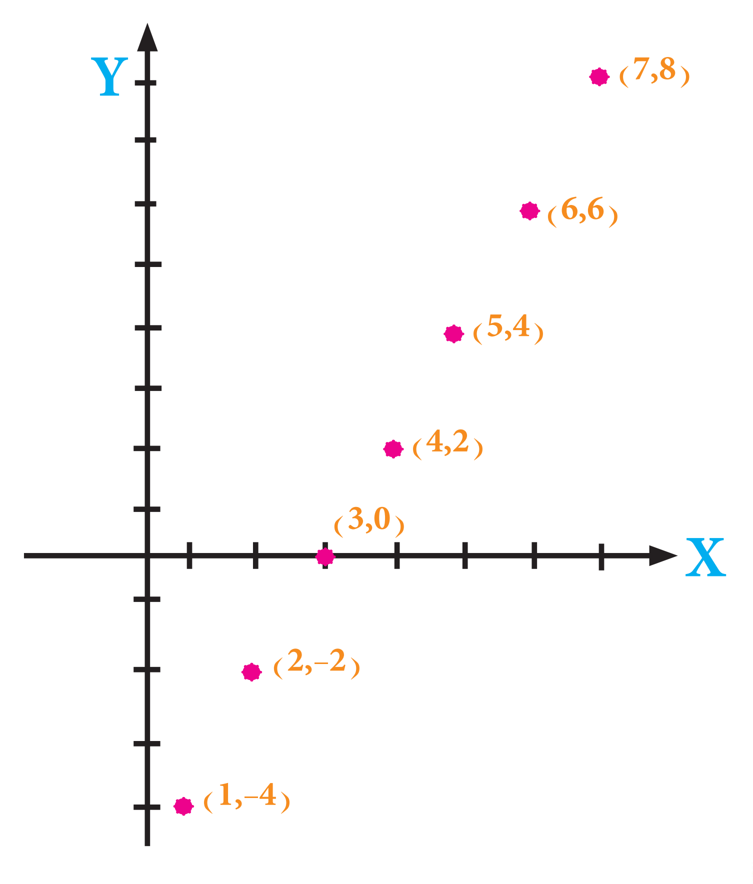
نعين النقاط $(6, \frac{7}{6})$ ، $(5, \frac{4}{5})$ ، $(4, \frac{5}{4})$ ، $(3, \frac{2}{3})$ ، $(2, \frac{3}{2})$ ، $(1, 0)$



$4)\ \langle H_n \rangle = \langle -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8 \rangle$

نلاحظ ان هذه المتتابعة هي متتابعة منتهية وعليه نرسم حدودها بتعيين النقط

$(1,-4)$ ، $(2,-2)$ ، $(3,0)$ ، $(4,2)$ ، $(5,4)$ ، $(6,6)$ ، $(7,8)$



تمارين [1− 2]

لكل من المتتابعات الاتية اكتب الحدود السبعة الاولى ثم مثلها بيانياً :

1) $\langle U_n \rangle = \langle 1+(-1)^n \rangle$

2) $\langle H_n \rangle = \langle 1 \ / \ n^2+1 \rangle$

3) $\langle H_n \rangle = \langle n^2 - 3 \rangle$

4) $\langle U_n \rangle = \langle 10 - 2n \rangle$

5) $\langle G_n \rangle = \langle 4 \rangle$

6) $U_n = \begin{cases} 3 & \text{عندما n عدد فردي} \\ -3 & \text{عندما n عدد زوجي} \end{cases}$

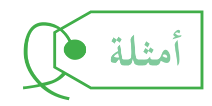
7) $\langle M_n \rangle = \langle -3\,(-1)^n \rangle$

8) $\langle G_n \rangle = \langle 3^{\,n-1} \rangle$

9) $\langle M_n \rangle = \langle \frac{1-2n}{n} \rangle$

10) $\langle U_n \rangle = \langle \frac{8}{n} \rangle$

[2-3] المتتابعات الحسابية (العددية) Arithmetic Sequences



لنلاحظ الامثلة الاتية:

1) $\langle Un \rangle = \langle 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22 \rangle$

2) $\langle Hn \rangle = \langle 30, 25, 20, 15, 10, 5, 0, -5, -10, -15 \rangle$

3) $\langle Gn \rangle = \langle 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 \rangle$

نلاحظ في المثال الاول ان

$U2 - U1 = 3 \quad , U3 - U2 = 3 \quad , U4 - U3 = 3 \quad , U5 - U4 = 3 \ldots$

وهكذا ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة =3 وهو مقدار ثابت اي ان $U_{n+1} - Un = 3$

[عدد(مقدار)ثابت].

وفي المثال الثاني فان

$H2 - H1 = -5 \quad , H3 - H2 = -5 \quad , H4 - H3 = -5 \quad , H5 - H4 = -5 \quad , H6 - H5 = -5$

وهكذا ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة = -5 وهو عدد(مقدار) ثابت أي أن:

$$H_{n+1} - H_n = -5$$

اما في المثال الثالث فان :

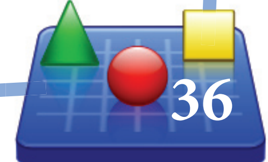
$G2 - G1 = 3 \quad , G3 - G2 = 5 \quad , G4 - G3 = 7 \quad , G5 - G4 = 9$

نلاحظ ان ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة متغير لذا فإنها ليست متتابعة حسابية، المتتابعات التي كما في المثالين (1)، (2) والتي تحقق الشرط $U_{n+1} - Un =$ عدد ثابت [نفرض العدد الثابت **d**] تسمى متتابعة حسابية.

تعريف (2-2)

تسمى المتتابعة $\langle Un \rangle$ حسابية اذا كان $\forall n \in Z^+$ ، $U_{n+1} - Un =$ مقدار ثابت

وليكن (d) اي ان $U_{n+1} - Un = d$ ونفس المعنى $U_{n+1} = Un + d$



حيث العدد الثابت d يسمى اساس المتتابعة وعليه لو كانت $\langle U_n \rangle$ متتابعة حسابية وحدها الاول $U_1 = a$ واساسها $= d$ فإن :

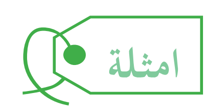
$$U_1 = a , U_2 = a + d , U_3 = a + 2d , U_4 = a + 3d , U_5 = a + 4d$$

ويكون حدها العام (الحد النوني)

$$U_n = a + (n-1) d$$

وعليه تكون المتتابعة

$$\langle U_n \rangle = \langle a , a + d , a + 2d , \ldots , a + (n-1) d , \ldots \rangle$$



اكتب الحدود الستة الاولى لكل من المتتابعات الحسابية الآتية :

1) حدها الاول $H_1 = -7$ واساسها $d = 2$

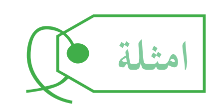
$$\langle H_n \rangle = \langle -7 , -5 , -3 , -1 , 1 , 3 , \ldots \rangle$$

2) حدها الاول $U_1 = \frac{5}{2}$ واساسها $d = -1$

$$\langle U_n \rangle = \langle \frac{5}{2} , \frac{3}{2} , \frac{1}{2} , \frac{-1}{2} , \frac{-3}{2} , \frac{-5}{2} , \ldots \rangle$$

3) حدها الاول $M_1 = 10$ واساسها $d = -3$

$$\langle M_n \rangle = \langle 10 , 7 , 4 , 1 , -2 , -5 , \ldots \rangle$$



1) اكتب الحد الثامن للمتتابعة الحسابية التي حدها الاول = -3 واساسها (7)

لدينا قانون الحد العام $Un = a + (n-1)\,d$

في هذا المثال لدينا $a = -3$, $d = 7$, $n = 8$ (ترتيب الحد المطلوب)

وبالتعويض نحصل $U8 = -3 + (8-1) . 7$

الحد الثامن $-3+49 =$

$= 46$

2) اكتب الحد العاشر للمتتابعة الحسابية التي حدها الاول (12) واساسها (-3)

الحل

$Un = a+(n-1).d$

$a = 12$, $d = -3$, $n = 10$

$U10 = 12+(10-1) . -3$

$=12-27$

$=-15$

3) استؤجر عامل في اول سنة براتب قدره (200000) دينار على ان يعطى زيادة ثابتة في نهاية كل شهر مبلغاً مقداره (15000) دينار فكم يبلغ راتبه في نهاية السنة ؟

نلاحظ ان راتب الشهر الاول = 200000 دينار

راتب الشهر الثاني = 215000 بعد الزيادة للشهر الاول

راتب الشهر الثالث = 230000 بعد الزيادة للشهر الثاني

راتب الشهر الرابع = 245000 بعد الزيادة للشهر الثالث

نلاحظ ان مبالغ الرواتب تكون متتابعة حسابية حدها الاول $a = 200000$ اساسها $d = 15000$

والمطلوب ايجاد الراتب في نهاية السنة الذي هو (Hn) حيث $n = 12$ [السنة (12) شهراً]

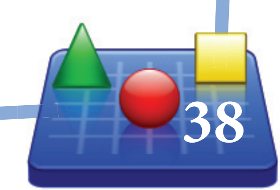
$Hn = a+(n-1)d$

فيكون $H12 = 200000+(12-1).15000$

$=200000+165000$

$=365000$

دينار راتبه الشهري في نهاية السنة



4) متتابعة حسابية حدها الاول=7 وحدها السادس= 8- جد اساسها واكتب الحدود الخمسة الاولى منها

$$U_n = a+(n-1).d$$

$$a = 7, U_6 = -8, n = 6$$

$$-8 = 7+(6-1)(d)$$

$$-8 - 7 = 5d$$

$$-15 = 5d$$

$$d = -3$$

$$U_1 = 7, U_2 = 4, U_3 = 1, U_4 = -2, U_5 = -5$$

5) في المتتابعة الحسابية ⟨ ...,42,39,36 ⟩ جد رتبة الحد الذي قيمته (6-) واي حد فيها يساوي صفر

$$U_n = a+(n-1).d$$

$$U_n = -6, a = 42$$

$$d = U_2 - U_1 = 39 - 42 = -3$$

$$-6 = 42 + (n-1)(-3)$$

$$-6 = 42 - 3n + 3$$

$$3n = 42 + 6 + 3 = 51$$

رتبة (ترتيب) الحد الذي قيمته (6-) هو $n = \frac{51}{3} = 17$

اي ان $U_{17} = -6$

اذا كان $Un = 0, a = 42, d = -3$ المطلوب ايجاد n

$$42+(n-1)(-3) = 0$$

$$42 - 3n + 3 = 0$$

$$3n = 45$$

$$n = \frac{45}{3} = 15$$

اي ان الحد الخامس عشر = صفر

$$U_{15} = 0$$

6) اذا كان الحد العاشر في متتابعة حسابية يساوي (62) واساسها يساوي (5) اكتب المتتابعة مبتدأً من الحد الاول

$Un = a + (n-1) . d$

$U10 = 62 , d = 5 , n = 10 , a = ?$

$62 = a + (10-1)(5)$

$62 = a + 45$

$a = 17$ الحد الاول

$\langle Un \rangle = \langle 17 , 22 , 27 , 32 , ... \rangle$

7) جد المتتابعة الحسابية التي حدها التاسع = 5 وحدها الثالث عشر = -3

$Un = a + (n-1).d$

$U9 = 5 , U13 = -3 , a = ? , d = ?$

$5 = a + (9-1) d$

$(1 .... 5 = a + 8d$

$-3 = a + (13-1)d$

$(2 ...... -3 = a + 12d$

$\mp 5 = \mp a \mp 8d$ بالطرح

$-8 = 4d$

الاساس $d = -2$ تعوض في (١)

$5 = a + 8 (-2)$

$5 + 16 = a$

الحد الاول $a = 21$

المتتابعة $\langle Un \rangle = \langle 21 , 19 , 17 , 15 , ... \rangle$

8) المتتابعة $\langle 3n + 1 \rangle = \langle U_n \rangle$

توجد اربع اجابات واحدة منها صحيحة . اختر الاجابة الصحيحة :

أ) اساسها = 3 وحدها الخامس = 15

ب) اساسها = 3− وحدها الرابع = 13

جـ) اساسها = 4 وحدها الاول = 6

د) اساسها = 3 وحدها الثالث = 10

الحل

المتتابعة $\langle 3n + 1 \rangle = \langle U_n \rangle$

$\langle U_n \rangle = \langle 4, 7, 10, 13, 16 \rangle$

حدها الاول = 4 اساسها = 3

الفرع أ خطأ ، الفرع ب خطأ ، الفرع جـ خطأ

الفرع د صحيح

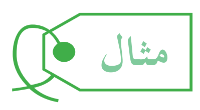
[1-3-2] الاوساط الحسابية   Arithmetic Means

اذا كان لدينا العددان k,a وادخلنا بينها الاعداد المرتبة ... , b,c,g بحيث يكون $\langle a,b,c,g,\dots,k \rangle$

متتابعة حسابية ، الاعداد ... , b,c,g تسمى اوساط حسابية للعددين a,k وبذلك يكون :

عدد حدود المتتابعة = عدد الاوساط الحسابية + 2

والحد الاول للمتتابعة = a وحدها الاخير = k



أدخل ستة اوساط حسابية بين 2,37

عدد الحدود = 2+6=8

$U_8=37 \ , \ a=2$

$U_n=a+(n-1).d$

$37=2+7d$

$35=7d$

$d=5$

المتتابعة هي : $\langle U_n \rangle = \langle 2,7,12,17,22,27,32,37 \rangle$

الاوساط هي : 7,12,17,22,27,32

[2-3-2] مجموع حدود المتتابعة الحسابية

لتكن $\langle Un \rangle$ متتابعة حسابية اساسها (d) حدها الاول $= a$

$$\langle Un \rangle = \langle U1, U2, U3, U4, \ldots \rangle$$

$$= \langle a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots \rangle$$

ولنرمز لمجموع (n) من الحدود من هذه المتتابعة بالرمز (Sn) ابتداءً من الحد الاول فإن :

$$Sn = a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+(U_n-2d)+(U_n-d)+U_n \ldots\ldots (1)$$

ويمكن كتابة المجموع (Sn) بالشكل :

$$Sn = U_n+(U_n-d)+(U_n-2d)+\ldots+(a+2d)+(a+d)+a \ldots\ldots (2)$$

وبجمع المعادلتين (1) ، (2) نحصل على :

$$2Sn = (a+U_n)+(a+U_n)+ \ldots + (a+U_n)$$

عدد المقدار U_n هو n من المرات فيكون :

$$2Sn = n(a+U_n)$$

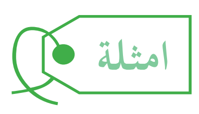
$$Sn = \frac{n}{2}(a+U_n) \ldots\ldots 1$$

حيث (n) عدد الحدود ابتداءً من الحد الاول وبالترتيب الى الحد $Un = an$

وبما ان $Un = an$ وان $Un = a+(n-1)d$ وبالتعويض في (1) نحصل على ان :

$$Sn = \frac{n}{2}[2a+(n-1).d]$$

حيث عدد الحدود $=n$ ، الحد الاول $= a$ ، الاساس $= d$



1) جد مجموع الحدود العشرة الاولى من المتتابعة

$$\langle Un \rangle = \langle 17, 22, 27, 32, \ldots \rangle$$

$$Sn = \frac{n}{2}[2a+(n-1).d]$$

$$n = 10, a = 17, d = 22-17 = 5$$

$$S10 = \frac{10}{2}[2\times17+(10-1)\times5]$$

$$S10 = 5[34+45] = 5\times79 = 395$$

او بطريقة اخرى

$a = 17, n = 10, d = 22 - 17 = 5$

$U_n = a + (n-1).d$

$U_{10} = 17 + (10-1) \times 5$

$= 17 + 45 = 62$

$S_n = \frac{n}{2} [a + U_n]$

$= \frac{10}{2} [17 + 62] = 5 \times 79 = 395$

2) بيّن نوع المتتابعة التي حدها العام $\langle H_n \rangle = \langle 2n-7 \rangle$ وأوجد مجموع الحدود الخمسة عشر الاولى منها

$H_n = 2n - 7$

$H_1 = 2 \times 1 - 7 = -5$ الحد الاول

$H_2 = 2 \times 2 - 7 = -3$ الحد الثاني

$H_3 = 2 \times 3 - 7 = -1$ الحد الثالث

$H_4 = 2 \times 4 - 7 = 1$ الحد الرابع

نلاحظ ان الفرق بين كل حد وسابقه مباشرة مقدار ثابت =2 وعليه تكون المتتابعة حسابية فيها

$H_1 = -5$

$d = (-3) - (-5) = 2$

$n = 15$

$S_{15} = \frac{15}{2} [2 \times (-5) + (15-1)(2)]$

$S_{15} = \frac{15}{2} [-10 + 28]$

$= \frac{15}{2} \times [18] = 135$

3) جد عدد الاعداد الصحيحة المحصورة بين (100) ، (1000) والتي تقبل القسمة على (9) بدون باقٍ ثم جد مجموعها.

لايجاد اول عدد يقبل القسمة على (9) بدون باق بعد (100) نقسم (100) على (9) فتقول $\frac{100}{9}=11$ والباقي 1 ولكي يكون الباقي يقبل القسمة على (9) بدون باقي نضيف له (8) فيكون اول عدد بعد (100) يقبل القسمة على (9) وبدون باق هو (108).

ولأيجاد آخر عدد يقبل القسمة على (9) بدون باق قبل (1000) نقسم (1000) على (9) فنقول $\frac{1000}{9}=111$ والباقي (1) وعليه يكون اخر عدد يقبل القسمة على (9) بدون باق $999 = 1000-1$

وعليه الاعداد الصحيحة المحصورة بين (100) ، (1000) والتي تقبل القسمة على (9) بدون باق تكون متتابعة حسابية هي:

$$\langle Un \rangle = \langle 108,117,126,135,\ldots,999 \rangle$$

الآن لدينا:

$a = 108 , d = 9 , Un = 999 , n = ?$

$Un = a + (n-1).d$

$999 = 108 + (n-1)(9)$

$999 = 108 + 9n - 9$

$999 - 99 = 9n$

$n = \frac{900}{9} = 100$

مجموع الاعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على (9) بدون باق ومحصورة بين (100) ، (1000)

$$Sn = \frac{n}{2}[a+Un]$$

$n = 100 \ , a = 108 \ , Un = 999$

$$S100 = \frac{100}{2}[108+999]$$

$$S100 = \frac{100}{2}[108+999]$$

$$= (50)(1107) = 55350$$

4) جد عدد الاعداد الصحيحة الموجبة الفردية التي اقل من (200) ثم جد مجموعها.

الاعداد الفردية الصحيحة الموجبة التي اقل من (200) هي $1,3,5,7,9, \ldots, 199$

تكون متتابعة حسابية فيها : $a = 1 , d = 2 , Un = 199$

$$Un = a+(n-1).d$$

$$199 = 1+(n-1)(2)$$

$$199 = 1+2n-2$$

$$200 = 2n$$

$n = \frac{200}{2} = 100$ عدد الاعداد

$$Sn = \frac{n}{2}[a+Un]$$

$$S100 = \frac{100}{2}[1+199]$$

$S100 = 50 \times 200 = 10000$ مجموع الاعداد

تمارين [2 -2]

1) لكل مما يأتي اربع اجابات واحدة منها فقط صحيحة.

اختر الجواب الصحيح

أ) المتتابعة $\langle 10-5n \rangle$

1) اساسها (5) وحدها العاشر = -40

2) اساسها (-5) وحدها العاشر = 40

3) اساسها (-5) وحدها العاشر = -40

4) ليس اياً مما ذكر .

ب) اذا كانت $\langle x,y,9,11,13, \ldots \rangle$ متتابعة حسابية فان :

1) $Y=-7 , X=-5$

2) $Y=-7 , X=5$

3) $Y=7 , X=-5$

4) $Y=7 , X=5$

2) جد الحد الثالث عشر من المتتابعة $\langle \ldots , 12 , 4 , -4 \rangle$

3) جد عدد الحدود والاساس للمتتابعة المنتهية التي حدها الاول =9 وحدها الاخير = -6 ومجموع حدودها = 24.

4) جد عدد الاعداد الصحيحة المحصورة بين (100) ، (1000) والتي تقبل القسمة على (12) بدون باق ثم جد مجموعها .

5) رتبت مقاعد قاعة في (25) صفاً يحتوي الصف الاول على (20) مقعداً والثاني على (21) مقعداً والثالث على (22) مقعداً فما عدد المقاعد في القاعة ؟

6) جد مجموع الاعداد الصحيحة غير السالبة التي اقل من (500) .

7) اكتب الحدود الستة الاولى للمتتابعة الحسابية التي حدها الاول=7 وأساسها $d = -4$ ثم جد حدها الخامس عشر ومجموع الحدود العشرة الثانية منها.

8) ضع ثمانية اعداد صحيحة بين 38 , 2 لتتكون لديك متتابعة حسابية حدها الاول = 38 وحدها الاخير=2 ثم جد مجموع هذه الاعداد.

9) اذا بدأ بالعدد 5 فان الاعداد القابلة للقسمة على (5) بدون باقي هي ...,5,10,15 ما مجموع اول (30)عدداً منها .

10) كم من الاعداد يجب ان تأخذ من المتتابعة (...,1,2,3,4) لتحصل على مجموع يساوي (5050) ؟

11) جد عدد حدود المتتابعة (61، ...,14- ,17- ,20-) ثم جد مجموع حدودها.

12) جد المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس=8 وحدها الثامن عشر =31- ثم جد مجموع الحدود العشرة الاولى منها.

13) ادخل عشرة اوساط حسابية بين 3,36

14) متتابعة حسابية حدها الثاني =71- وحدها ما قبل الاخير = 3- ومجموع حدودها = 740- جد المتتابعة.

[2-4] المتتابعات الهندسية Geometric Sequences

لنلاحظ المتتابعات الآتية :

1) $\langle 2, 6, 18, 54, 162, \ldots \rangle$

2) $\langle 64, -32, 16, -8, 4, -2, \ldots \rangle$

3) $\langle 5, 7, 9, 11, 13, \ldots \rangle$

نشاهد في المثال الاول ان :

$$\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = \frac{162}{54} = \ldots = 3$$

اي ان ناتج قسمة اي حد على الحد السابق له مباشرة مقدار ثابت (او عدد ثابت) هو (3) في هذا المثال

وفي المثال الثاني ان :

$$\frac{-32}{64} = \frac{16}{-32} = \frac{-8}{16} = \frac{4}{-8} = \frac{-2}{4} = \ldots = \frac{-1}{2}$$

اي ان ناتج قسمة اي حد على الحد السابق له مباشرة مقدار (عدد) ثابت في هذا المثال هو ($\frac{-1}{2}$) كل

المتتابعات التي مثل هذين المثالين تسمى متتابعة هندسية اي ان المتتابعة الهندسية هي المتتابعة التي يكون

فيها ناتج قسمة اي حد فيها على الحد السابق له مباشرة مقدار (عدد) ثابت يسمى اساس المتتابعة ونرمز له

بالحرف (r) وبشرط لا يوجد حد فيها قيمته صفر

اما المثال الثالث فلا يمثل متتابعة هندسية لأن $\frac{7}{5} \neq \frac{9}{7}$

تعريف (3-2)

المتتابعة ‹Un› تسمى متتابعة هندسية اذا تحقق الشرط

$$\frac{U2}{U1} = \frac{U3}{U2} = \frac{U4}{U3} = \ldots = \frac{Un}{Un-1} = r$$ عدد ثابت

يسمى اساس المتتابعة وبشرط $Un \neq 0$ لكل $n \in Z^+$

وعليه يكون في المتتابعة الهندسية $\frac{Un}{Un-1} = r$

نرمز للحد الاول للمتتابعة الهندسية ‹Un› بالرمز «a» والاساس بالرمز (r) فان

$$\langle Un \rangle = \langle U1 , U2 , U3 , U4 , \ldots , Un , \ldots \rangle$$

$$= \langle a , ar , ar^2 , ar^3 , \ldots , ar^{n-1} , \ldots \rangle$$

لأن كل حد في المتتابعة الهندسية = الحد السابق له مباشرة × الاساس

اي ان الحد العام (الحد النوني) للمتتابعة الهندسية

$$Un = r . Un-1$$

$$Un = ar^{n-1}$$



1) اكتب الحدود الستة الاولى للمتتابعة الهندسية التي حدها الاول = 64 واساسها ($\frac{-1}{4}$)

$U1 = 64$

$U2 = U1 . r = 64 \times \frac{-1}{4} = -16$

$U3 = U2 . r = -16 \times \frac{-1}{4} = 4$

$U4 = U3 . r = 4 \times \frac{-1}{4} = -1$

$U5 = U4 . r = -1 \times \frac{-1}{4} = \frac{1}{4}$

$U6 = U5 . r = \frac{1}{4} \times \frac{-1}{4} = \frac{-1}{16}$

او بطريقة ثانية

$U1 = a = 64$

$U2 = ar = 64 \times \frac{-1}{4} = -16$

$U3 = ar^2 = 64 \times (\frac{-1}{4})^2 = 4$

$U4 = ar^3 = 64 \times (\frac{-1}{4})^3 = -1$

$U5 = ar^4 = 64 \times (\frac{-1}{4})^4 = \frac{1}{4}$

$U6 = ar^5 = 64 \times (\frac{-1}{4})^5 = \frac{-1}{16}$

2) جد الحد السادس في المتتابعة الهندسية ‹ ...,7,14,28 ›

$a=7 \quad ,r= \frac{14}{7} =2 \quad ,n=6$

$Un = a\,r^{n-1}$

$U6=7\times 2^5=7\times 32 = 224$

3) متتابعة هندسية حدها الاول = 3 وحدها الخامس = 48 جد حدها الثامن

$Un = ar^{n-1}$

$U5 = ar^4$

$3r^4 = 48$

$r^4 = 16$

$r = \pm 2$

وهذا يعني وجود جوابين [اي متتابعتين تحققان شروط السؤال]

الاولى: حدها الاول = 3 واساسها = 2

فيكون الحد الثامن $U8 = 3 \times 2^7 = 3 \times 128 = 384$

الثانية: حدها الاول = 3 واساسها = 2−

فيكون الحد الثامن $U8 = 3(-2)^7 = 3\times -128 = -384$

4) اي حد في المتتابعة الهندسية ⟨2,10,50,250,...⟩ يساوي 781250

$r = \frac{10}{2} = 5$

$Un = ar^{n-1}$

$781250 = 2 \times (5)^{n-1}$ وبالقسمة على 2

$5^{n-1} = 390625$

$5^{n-1} = (5)^8$

$n-1 = 8$

$n = 9$ رتبة (ترتيب) الحد

5) جد المتتابعة الهندسية التي حدها السابع (625) وحدها الرابع (−5)

$Un = ar^{n-1}$

$U7 = ar^6 = 625 \ldots\ldots (1)$ الحد السابع

$U4 = ar^3 = -5 \ldots\ldots\ldots (2)$ الحد الرابع

بقسمة طرفي المعادلة (1) على المعادلة (2) نحصل على:

$$\frac{ar^6}{ar^3} = \frac{625}{-5}$$

$$r^3 = -125$$

$$r = \sqrt[3]{-125} = -5$$ الاساس

وبالتعويض في المعادلة (2) نحصل على

$$-5 = a \cdot (-5)^3$$

$$a = \frac{-5}{-125} = \frac{1}{25}$$

$$\therefore \langle Un \rangle = \langle \frac{1}{25}, \frac{-1}{5}, 1, -5, \ldots \rangle$$

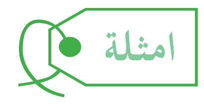
[1–4–2] الاوساط الهندسية Geometric Means

اذا كان لدينا العددان a,h وادخلنا بينهما الاعداد المرتبة $b,c,g,\ldots$ بحيث يكون $\langle a,b,c,g,\ldots,h\rangle$ متتابعة هندسية ، الاعداد $b,c,g,\ldots$ تسمى اوساط هندسية للعددين a,h وبذلك يكون :

عدد حدود المتتابعة = عدد الاوساط + 2

الحد الاول للمتتابعة = a

وحدها الاخير = h



1) ادخل ستة اوساط هندسية بين 5 ، 640

عدد الحدود = 2 + 6 = 8

$$U_n = U_8 = 5$$

$$U_1 = a = 640$$

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$5 = 640 \times r^{8-1}$$

$$r^7 = \frac{5}{640} = \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$\therefore \quad r = \frac{1}{2}$$

المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 640,320,160,80,40,20,10,5 \rangle$

الاوساط هي 320,160,80,40,20,10

[2-4-2] مجموع عدد معين من حدود متتابعة هندسية

تعلمنا ان المتتابعة الهندسية التي حدها الاول a = واساسها r = هي :

$$\langle Un \rangle = \langle a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}, \ldots \rangle$$

واذا اخذنا (n) حداً ابتداءاً من الحد الاول فتكون المتتابعة المختارة متتابعة منتهية هي : $\langle a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1} \rangle$ ولو رمزنا بالرمز Sn لمجموع هذه الحدود يكون :

$$Sn = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

وبضرب طرفي المعادلة (1) في (r) نحصل على

$$r\, Sn = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

وبطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نحصل على

$$Sn - r\, Sn = a - a\, r^n$$

$$(1-r)\, Sn = a\,(1-r^n)$$

$$\boxed{Sn = \frac{a\,(1-r^n)}{(1-r)}}$$

بشرط $r \neq 1$

وعندما $r = 1$ تكون المتتابعة المنتهية التي عدد حدودها (n) هي $\langle a, a, a, \ldots a \rangle$ ويكون $Sn = na$

امثلة

1) جد مجموع الحدود الستة الاولى من المتتابعة الهندسية $\langle 3, 9, 27, 81, \ldots \rangle$

$$a = 3 \ ، \ r = \frac{9}{3} = 3 \ ، \ n = 6$$

$$Sn = \frac{a\,(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S6 = \frac{3(1-3^6)}{(1-3)}$$

$$S6 = \frac{3(1-729)}{-2}$$

$$S6 = 3 \times \frac{(-728)}{-2} = 1092$$

2) ما مجموع حدود المتتابعة الهندسية التي حدها الاول = 3 وحدها الاخير = 48 واساسها = 2

$$Un = ar^{n-1}$$

$$48 = 3 \times 2^{n-1}$$

$$2^{n-1} = 16 = 2^4$$

$$n-1 = 4$$

$$n = 5$$

$$Sn = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S5 = \frac{3(1-2^5)}{(1-2)} = \frac{3(1-32)}{-1}$$

$$S5 = (-3).(-31) = 93$$

3) اذا كان مجموع الحدود الستة الاولى من متتابعة هندسية يساوي تسعة امثال مجموع الحدود الثلاثة الاولى منها فما اساس المتتابعة ؟

$$Sn = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S6 = \frac{a(1-r^6)}{(1-r)}$$

$$S3 = \frac{a(1-r^3)}{(1-r)}$$

$$\frac{a(1-r^6)}{(1-r)} = 9 \times \frac{a(1-r^3)}{(1-r)}$$

بالضرب في $(1-r)$

$$a(1-r^6) = 9a\,(1-r^3)$$

بالقسمة على a وتحليل $(1-r^6)$

بالقسمة على $(1-r^3)$

$$(1-r^3)(1+r^3) = 9(1-r^3)$$

$$1+r^3 = 9$$

$$r^3 = 9-1$$

$$r^3 = 8$$

$r = 2$ الاساس

4) متتابعة هندسية مجموع الحدود الثلاثة الاولى منها (26) ومجموع الحدود الثلاثة التالية لها (702)

فما هي المتتابعة ؟

$$Sn = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S3 = \frac{a(1-r^3)}{(1-r)} = 26 \ldots\ldots (1)$$

مجموع الحدود الستة الاولى $26+702 = 728$

$$S6 = \frac{a(1-r^6)}{(1-r)} = 728 \ldots\ldots\ldots (2)$$

بقسمة المعادلة (2) على المعادلة (1)

$$\frac{a(1-r^6)}{(1-r)} \div \frac{a(1-r^3)}{(1-r)} = \frac{728}{26}$$

$$\frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{(1-r)} \times \frac{(1-r)}{a(1-r^3)} = 28$$

$$1+r^3 = 28$$

$$r^3 = 27$$

$$r = 3$$

نعوض في المعادلة (1) نحصل

$$26 = \frac{a(1-3^3)}{(1-3)}$$

$$26 = \frac{a(1-27)}{-2}$$

$$-52 = -26a$$

$$a = 2$$

المتتابعة $\langle Un \rangle = \langle 2,6,18,54,\ldots \rangle$

طريقة ثانية

مجموع الحدود الثلاثة الاولى $a + ar + ar^2 = 26$

مجموع الحدودالثلاثة التالية :

$$ar^3 + ar^4 + ar^5 = 702$$

$$\frac{a+ar+ar^2}{ar^3+ar^4+ar^5} = \frac{a(1+r+r^2)}{ar^3(1+r+r^2)} = \frac{26}{702} \longrightarrow \frac{a(1+r+r^2)}{ar^3(1+r+r^2)} = \frac{1}{27}$$

$$r^3 = 27 \longrightarrow r = 3$$

$$a(1+3+9) = 26 \longrightarrow 13\,a = 26 \longrightarrow a = 2$$

[2-4-3] امثلة تطبيقية على المتتابعات الهندسية في موضوع القيمة الحالية وجملة الدفعة السنوية

الرموز المستخدمة :

المبلغ (Amount) يرمز له «A» السعر (Price) يمثل ربح المئة في سنة واحدة يرمز له «P» الربح (Profit) ويرمز له (Pr) الزمن (Time) يرمز له «T» .

الجملة هي (المبلغ + الربح) [Wholesale] وهي مايؤول اليه المبلغ الموضوع بسعر معين بعد فترة من الزمن .

القيمة الحالية [Current Value] ويرمز له «C» والربح اما يكون بسيطاً (Simple profit) او مركباً (Compound profit) .

الربح البسيط يرمز له (S.pr) ويحسب على رأس المال (المبلغ) فقط وفق القانون :

$$S.pr = \frac{A.T.P}{100}$$

حيث ان A المبلغ ، T الزمن ، P الربح

اما الربح المركب يرمز له (C.pr) يحسب على رأس المال وعلى الربح ايضاً ويمكن حساب جملة المبلغ الذي يحسب له ربحاً مركباً وفق القانون :

$$W = A(1.0P)T$$

وقد تضاف الارباح في كسور من السنة فمثلاً قد تضاف الارباح في نهاية كل ستة اشهر اي مرتين في السنة او كل اربعة اشهر اي ثلاث مرات في السنة وهكذا فيكون القانون بالشكل :

$$W = A\left[1 + \frac{0.0P}{n}\right]^n$$

حيث (n) عدد المرات تضاف الارباح في السنة

Current value [2-4-4] القيمة الحالية

في بعض القضايا التجارية قد يحتاج البعض الحصول على المال قبل موعد الاستحقاق لدفع المبلغ في مثل هذه الاحوال يعمدون الى تنزيل قيمة المبلغ وعندئذ يخصم من المبلغ مقداراً من المال يسمى عمولة (او تنزيل داخلي).

فمثلاً :

اذا كان لدى احدهم كمبيالة قيمتها (A) تستحق الدفع بعد (t) من الزمن بالسنين واراد ان ينزلها عند احد المصارف فإن المصرف يأخذ عليها عمولة وهذه العمولة هي عبارة عن ربح المبلغ المعطى لصاحب الكمبيالة بحيث لو وضع بالربح المركب لمدة (t) من السنين وبسعر (%P) تصبح جملة (A) وهكذا المبلغ المعطى لصاحب الكمبيالة يسمى القيمة الحالية (C) بينما (A) يسمى القيمة اللاسمية للكمبيالة وعلى هذا فإن القيمة الحالية لمبلغ معين هي المبلغ الذي تعير جملته في نهاية المدة بمقدار المبلغ المعين وعليه يكون :

$$A = C \cdot (1.0P)^t$$

$$C = \frac{A}{(1.0P)^t}$$

$$C = A.(1.0P)^{-t}$$

امثلة

1) لدى رجل كمبيالة بمبلغ (3) ملايين دينار تستحق الدفع بعد مرور (5) سنوات ولكنه اراد ان يستلم قيمتها الان فإذا كان سعر الربح المركب 5 % في السنة فما مقدار ما يستلمه ؟

$$C = A.(1.0P)^{-t}$$

$$A = 3000000 \quad , P = \%5 \quad , t = 5$$

$$C = 3000000(1.05)^{-5}$$

لايجاد قيمة «C» سنستخدم اللوغارتمات (استخدم آلتك الحاسبة) كما لا تعلمت من الفصل السابق فيكون :

$$\text{Log } C = \text{Log } [3000000(1.05)^{-5}]$$

$$\text{Log } C = \text{Log } 3000000 + \text{Log}(1.05)^{-5}$$

$$\text{Log } C = \text{Log } 3000000 - 5 \text{ Log}(1.05)$$

$$Log\ C = 6.4771 - (5) \times (0.0212)$$

حيث : $Log\ 3 = 0.4771$

$$Log\ 105 = 2.0212$$

$$Log\ C = 6.4771 - 0.1060$$

$$Log\ C = 6.3711 \qquad C = 2351000$$

ملاحظة

نجد اللوغاريتمات اما باستخدام الحاسبة او الجداول اللوغاريتمية او تعطى في السؤال .

2) يودع رجل في نهاية كل سنة مبلغ (5) خمسة ملايين دينار ليربح ربحاً مركباً بسعر (4 %) في السنة فما مقدار رصيده عند ايداعه المبلغ العاشر ؟

الحل

الرصيد هو عبارة عن جملة عدة مبالغ متساوية ،وضعت لمدة مختلفة وعليه يكون :

الرصيد للمبلغ الاول = W1 = جملة (5) ملايين دينار وضعت لمدة تسع سنوات اي ان :

$$W1=5000000(1.04)^9$$

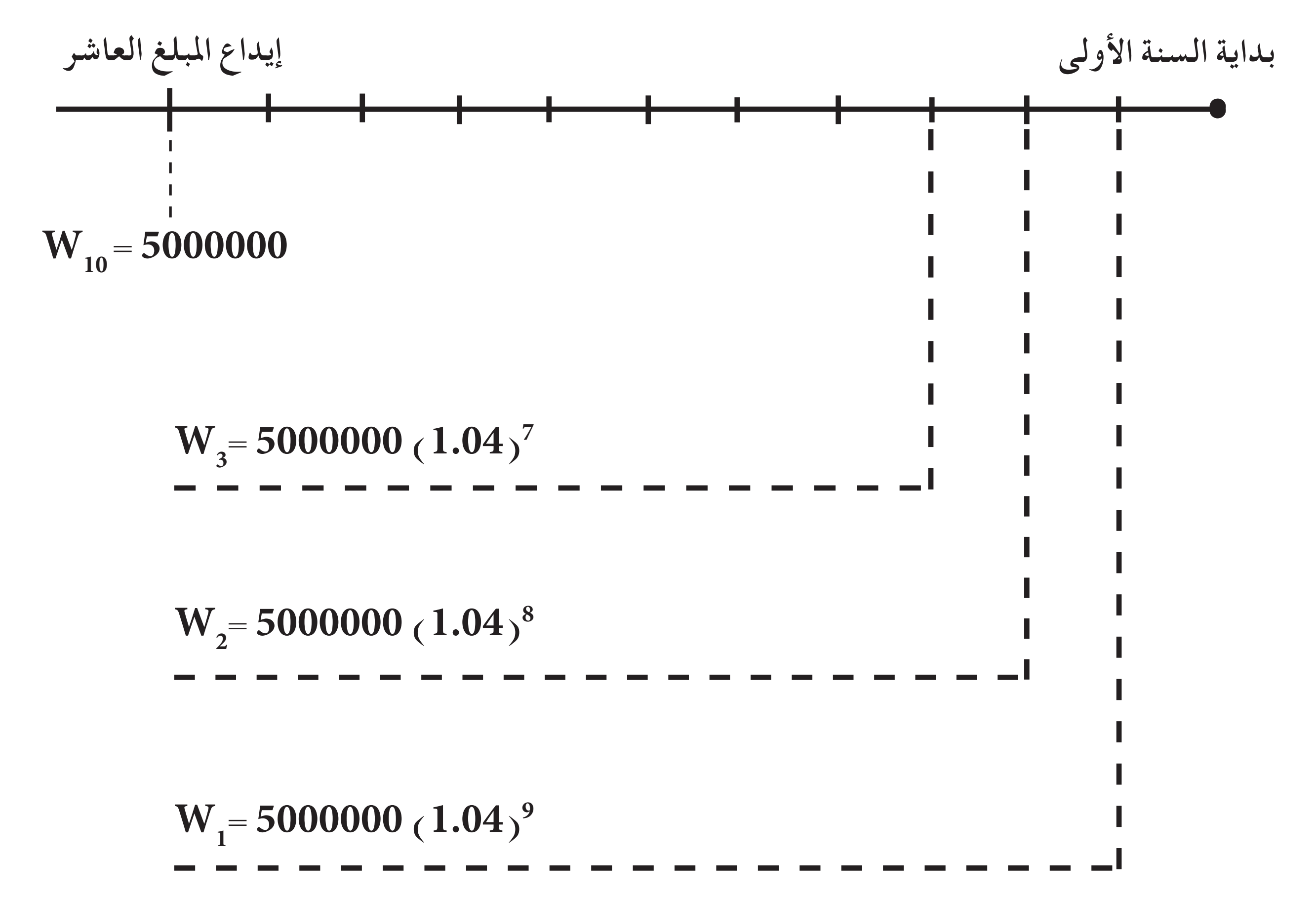
الرصيد للمبلغ الثاني = W2 = جملة (5) ملايين دينار وضعت لمدة ثمان سنوات اي ان :

$$W2=5000000(1.04)^8$$

الرصيد للمبلغ الثالث = W3 = جملة (5) ملايين دينار وضعت لمدة سبع سنوات اي ان :

$$W3=5000000(1.04)^7$$

وهكذا كما في الشكل :



ولو فرضنا ان :

$$W = W1 + W2 + W3 + \ldots + W10$$

فان :

$$W = 5000000[(1.04)^9 + (1.04)^8 + (1.04)^7 + \ldots + 1]$$

ولو نظرنا الى المقدار المحصور بين القوسين نجد أنه متتابعة هندسية يمكن اعتبار حدها الاول=1 [اخذ المجموع من اليسار]واساسها = 1.04 وعدد حدودها (10) فيكون :

$$W = 5000000\left[\frac{1(1-(1.04)^{10})}{(1-1.04)}\right]$$

$$W = 5000000\left[\frac{1-(1.04)^{10}}{-0.04}\right]$$

وباستخدام اللوغارتمات نجد قيمة (1.04) فنقول :

$$X = (1.04)^{10}$$
$$\text{Log } X = 10.\text{Log}1.04$$
$$\text{Log } X = 10 \times 0.017$$
$$\text{Log } X = 0.17$$
$$\therefore X = 1.479$$



للحصول على اللوغارتمات نستخدم الجداول او الحاسبة او تعطى في السؤال :

$$\therefore \quad W = 5000000 \times \frac{(1-1.479)}{-0.07}$$

$$W = 5000000 \times \frac{0.479}{0.04}$$

$$W = 59875000$$

3) أمن رجل على حياته بمبلغ (10) ملايين دينار لدى احدى شركات التأمين على ان يدفع قسطاً سنوياً قدره (350000) دينار يدفع في اول كل سنة ولمدة (20) سنة ويدفع القسط الاول بعد التعاقد مباشرة فما ربح الشركة في نهاية المدة اذا استثمرت اموالها بربح مركب سعره (6 %) مع العلم ان $Log2396 = 3.3790$, $Log(0.32.6) = 1.506$, $Log1060 = 3.0253$.

الحل

اذا كانت الشركة تستثمر الاقساط بالربح المركب بسعر 6 % في السنة .

فإن : القسط الاول في نهاية المدة يصبح جملة القسط لمدة (20) سنة = W1

والقسط الثاني في نهاية المدة يصبح جملة القسط لمدة (19) سنة = W2

والقسط الثالث في نهاية المدة يصبح جملة القسط لمدة (18) سنة = W3

وهكذا ويكون :

$$W = W1 + W2 + W3 + \ldots + W20$$

ويكون :

$$W1 = 350000(1.06)^{20}$$
$$W2 = 350000(1.06)^{19}$$
$$W3 = 350000(1.06)^{18}$$
$$W20 = 350000(1.06)$$

وبالجمع يكون :

$$W = 350000[(1.06)^{20} + (1.06)^{19} + (1.06)^{18} + \ldots + (1.06)]$$
$$= 350000(1.06)[(1.06)^{19} + (1.06)^{18} + \ldots + 1]$$

المقدار الذي داخل القوس متتابعة هندسية فيكون :

$$W = 350000.(1.06) \times \frac{1[(1.06)^{20} - 1]}{(1.06 - 1)}$$

$$W = \frac{350000 \times (1.06)}{0.06} [(1.06)^{20} - 1]$$

$$W = \frac{37100000}{6} [(1.06)^{20} - 1]$$

نجد $(1.06)^{20}$ باستخدام اللوغاريتمات ليكن :

$$x = (1.06)^{20}$$

$$\text{Log } x = 20 . \text{Log}(1.06)$$

$$\text{Log } x = 20 \times 0.253$$

$$\text{Log } x = 0.5060$$

$$x = 3.206$$

$$\therefore W = \frac{37100000}{6} [3.206 - 1]$$

$$W = \frac{37100000}{6} \times 2.206$$

$$W = 13640430$$

فيكون ربح الشركة :

$$13640430 - 10000000 = 3640430$$

دينار ربح الشركة

تمارين [3- 2]

1) جد مجموع حدود كل من المتتابعات الهندسية الاتية :

a) $\langle 1 , 2 , 4 , \ldots 128 \rangle$

b) $\langle 3 , -6 , 12 , \ldots , -512 \rangle$

c) $\langle \frac{1}{2} , \frac{-1}{4} , \frac{1}{8} , \ldots , \frac{1}{256} \rangle$

2) جد المتتابعة الهندسية التي حدها الاول = -16 ومجموع الحدود الثلاثة الاولى منها يساوي (-48)

3) جد الحد العاشر من المتتابعة الهندسية التي يكون مجموع الحدود السبعة الاولى منها (547) واساسها (-3)

4) متتابعة هندسية حدها الاول = 256 واساسها $(\frac{-1}{2})$ ومجموع (n) من حدودها ابتداءاً من الحد الاول يساوي $170\frac{1}{2}$ فما قيمة (n) ؟

5) من المعلوم ان عدد مربعات رقعة الشطرنج = 64 مربعا فلو اراد شخص ان يضع على المربع الاول حبة حنطة واحدة وعلى المربع الثاني حبتين وعلى المربع الثالث (4) حبات وعلى المربع الرابع (8) حبات وهكذا فما عدد الحبوب التي يمكن وضعها على المربع الاخير وما مجموع الحبوب على الرقعة [استعن باللوغاريتمات لايجاد النتائج]

6) عيّن المتتابعة الهندسية التي حدها الاول هو (-16) ومجموع الحدود الثلاثة الاولى منها يساوي (-48)

7) اذا كانت النسبة بين مجموع الحدود الاربعة الاولى لمتتابعة هندسية الى مجموع الحدود الثمانية الاولى منها كنسبة $\frac{1}{17}$ فما اساس المتتابعة ؟

8) متتابعة هندسية حدها الثاني (128) وحدها السابع (4) فما مجموع الحدود التسعة الاولى منها ؟

9) يودع رجل في بداية كل سنة مبلغ (5) ملايين دينار في مصرف ليربح ربحاً مركباً بسعر $5\ \%$ فما مقدار رصيده في نهاية السنة السادسة مع العلم ان $\text{Log}3767=3.5767$, $\text{Log}(105)=2.0212$ ؟

10) وضع رجل مبلغ (500000) دينار في مصرف بحساب الربح المركب بسعر $(4\ \%)$ لمدة (20) سنة فما جملة المبلغ مع العلم ان $\text{Log}1094=3.0390$, $\text{Log}500=2.6990$, $\text{Log}(104)=2.0170$ ؟

تمارين عامة على الفصل

1) لكل مما يأتي توجد اربع اجابات واحدة منها فقط صحيحة. اختر الاجابة الصحيحة :

أ) اذا كانت $\langle \ldots, -5، 0، x، 10\rangle$ متتابعة حسابية فان :

1) $x = 5$ 2) $x = -5$ والحد السادس $= -10$

3) $x = -5$ 4) ليس اياً مما ذكر

ب) متتابعة حسابية حدها الثامن = 28 وحدها الحادي والعشرين = 67 فان :

1) اساسها = 3   وحدها الاول = -7

2) اساسها = -3 وحدها الاول = -7

3) اساسها = 3   وحدها الاول = 7

4) اساسها = -3 وحدها الاول = 7

جـ) عدد الاعداد الصحيحة المحصورة بين (1000) ، (2000) ويقبل القسمة على (7) بدون باق هو

1) 142   2) 143   3) 144   4) 285

د) رتبة الحد الذي قيمته $\frac{1}{192}$ في المتتابعة $\langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \ldots \rangle$ هي :

1) 8   2) -8 3) $\frac{1}{8}$ 4) $\frac{1}{2}$

2) يوجد (n) من الاوساط العددية بين 3، 36 ونسبة الوسط الثاني الى الوسط الذي ترتيبه (n−1) هي $\frac{3}{10}$ فما قيمة (n)؟

3) اوجد مجموع الاعداد الصحيحة التي اكبر من 100 واصغر من 1000 والتي لاتقبل القسمة على 5 بدون باق

4) ثلاثة اعداد تكون متتابعة هندسية مجموعها = 14 وحاصل ضربها = 64 فما هذه الاعداد ؟

5) اذا كان الزيت المستهلك من احد الخزانات في كل يوم = $\frac{2}{3}$ ما يستهلك منه في اليوم السابق مباشرة فإذا استهلك منه في اليوم الاول (243) لتراً فبعد كم يوم يستهلك منه (665) لتراً؟

6) اذا كان $\langle x, 7, \ldots, y, 25\rangle$ متتابعة حسابية وكانت $y = 5x + 2$ جد عدد حدود المتتابعة ومجموعها .

7) اي العبارات الاتية صائبة واي منها خاطئة

أ) اذا كان (r) اساس المتتابعة الهندسية ‹Un› فان $U5 = r^2 . U3$

ب) اساس المتتابعة الهندسية ‹ ...,1,-1,1,-1 › هو (1)

جـ) اذا كانت ‹ ..., $-\frac{1}{2}$ ، 2, a, 32 › متتابعة هندسية فان $a = -8$.

د) اذا كانت ‹16, x , 4› متتابعة هندسية فان $x = -8$

هـ) في المتتابعةحسابية ‹3,7,11,...,x,63› فان $x = 59$

و) متتابعة حسابية حدها الثالث = 9 وحدها السابع = -3 فان حدها العاشر = -12 .

7) متتابعة حسابية مجموع الحدود السبعة الاولى منها $\frac{35}{2}$ وحدودها الاول والثالث والسابع تكون متتابعة هندسية جد المتتابعة الهندسية.

8) كم حداً يلزم اخذها ابتداءاً من الحد الاول للمتتابعة الهندسية ‹...,64,96,144› ليكون مجموعها 2059

9) متتابعة حسابية اساسها (3) وحدودها الثاني والرابع والثامن تكون متتابعة هندسية جد المتتابعة الهندسية.

10) ما عدد الاوساط الهندسية بين (1536) ، (3) اذا كان الوسط الرابع (48) .

الفصل الثالث
CHAPTER 3

المصفوفات والمحددات

[3-1] مقدمـة

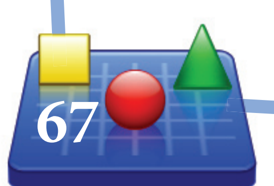
تلعب المصفوفات دوراً مهماً في علم الرياضيات وعلم الاحصاء وعلم الاقتصاد والمجالات الاخرى مثلاً الحاسبات، وهندسة الكهرباء والاتصالات والعلوم الاخرى.

وكان للعالم الياباني سيكي كووا (1683) والعالم الالماني ليبنز (1693) الفضل في اكتشاف المصفوفات والمحددات وذلك من خلال العمل بطريقة الصينيين القدماء في حل المعادلات الآنية عن طريق استخدام اعواد من البوص ووضعها في مربعات بتنظيم معين مشابه لطريقة حساب محددة المصفوفة. لقد نشر ليبنز اول مثال عن المصفوفات والمحددات بعد ذلك بعشر سنوات.

أما العالم كيلي (1821) فقد قدم سنة (1857) نوعاً آخر من الجبر هو جبر المصفوفات.

وفي عام 1750 طور كرامر طرق حل المعادلات الخطية بأستخدام المحددات، ان للمحددات والمصفوفات تطبيقات كثيرة في الرياضيات. كهندسة التحويلات النقطية. والهندسة المستوية وهندسة الفضاء. وامتد هذا الاهتمام ليشمل مجالات عدة مثل: مجالات التخطيط والتجارة والاقتصاد والصناعة والزراعة وعلوم الفيزياء والاحياء وغيرها.

ومن أهم الاستخدامات الحديثة للمصفوفات كونها اسلوباً رئيسياً لتزويد الحاسب الالي بالبيانات وكذلك تبسيطها اساليب عمله الى حد كبير وفي هذا الفصل سنعرف المصفوفة وبعض العمليات عليها. ونعرف محدد المصفوفة وكيفية استخدامه في حل المعادلات الاتية بطريقة كرامر.



[2 – 3] المصفوفات وخواصها Matrices and their properties

في اغلب مجالات الرياضيات والاحصاء والعلوم الاخرى يتم تبويب وتنظيم البيانات حيث ترتب بشكل قاعدة منظمة من البيانات .

مثلاً في الجدول الآتي اعداد تبين ترتيب أول أربعة فرق في الدوري العراقي لكرة القدم سابقاً بعد مرور 10 مباريات من بدء الدوري الممتاز .

اسم الفريق	عدد الفوز	التعادل	الخسارة	النقط
الزوراء	6	3	1	21
الجوية	5	2	3	17
الطلبة	5	1	4	16
الشرطة	4	3	3	15

لو اخذنا الاعداد فقط واهملنا التسميات لحصلنا على الجدول الآتي:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 21 \\ 5 & 2 & 3 & 17 \\ 5 & 1 & 4 & 16 \\ 4 & 3 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان العمود الاول يمثل اعداد المباريات التي فاز فيها كل فريق والصف الاول يحتوي على اعداد تمثل نتائج فريق الزوراء من فوز وتعادل وخسارة وعدد النقط .

مثلاً عندما نسأل عن عدد تعادلات نادي الطلبة فأن الصف الثالث يمثل نتائج نادي الطلبة والعمود الثاني يمثل عدد التعادلات فالعدد الموجود في الصف الثالث والعمود الثاني هو 1 يمثل عدد تعادلات نادي الطلبة .

وبنفس الطريقة نجد عدد الفوز لنادي الشرطة والذي هو في الصف الرابع والعمود الاول والعدد هو 4 .

وهذا التنظيم العددي للبيانات وبهذا الشكل يسمى بالمصفوفة **Matrix** .

مثال : البيانات الآتية تبين المعدل (الوسط الحسابي) لدرجات الطلاب في احدى الثانويات في مادتي اللغة الانكليزية والرياضيات للامتحانات الوزارية للمرحلتين المتوسطة والاعدادية (العلمي فقط) للسنوات 2006 - 2007 - 2008

السنة	اللغة الانكليزية		الرياضيات	
	المتوسطة	الاعدادي	المتوسطة	الاعدادي
2006	58	63	61	69
2007	56	65	64	67
2008	62	69	68	71

لو اخذنا المعدلات فقط دون ذكر التفاصيل نحصل على الجدول الآتي :

$$\begin{bmatrix} 58 & 63 & 61 & 69 \\ 56 & 65 & 64 & 67 \\ 62 & 69 & 68 & 71 \end{bmatrix}$$

اعداد الصف الاول تمثل معدلات للعام 2006 ومعدلات العمود الثالث مثلاً تمثل درجات الرياضيات للمرحلة المتوسطة. وهكذا لبقية الصفوف والاعمدة.

فالتنظيم العددي للبيانات بهذا الشكل المستطيل يسمى بالمصفوفة **Matrix**.

تعريف (1 - 3)

المصفوفة عبارة عن ترتيب للاعداد على شكل مستطيل مرتبة بشكل صفوف (**rows**) عددها **m** واعمدة (**columns**) عددها **n** حيث **n** , **m** اعداد صحيحة موجبة.

يرمز للمصفوفة بالحرف الكبير **A** أو **B** وهكذا وتقرأ المصفوفة **A** أو **B**



مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad 2 \times 2 \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad 2 \times 3$$

نلاحظ عند كتابة المصفوفة نضع الاعداد بين قوسين كبيرين وعدد الصفوف m وعدد الاعمدة n .

[3 – 3] رتبة المصفوفة Order of a matrix

لكل مصفوفة رتبة تتمثل بعدد الصفوف أولاً ثم عدد الاعمدة ثانياً وتكتب $m \times n$ حيث عدد الصفوف m , عدد الاعمدة n

مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 40 & 31 & 45 \\ 30 & 41 & 36 \end{bmatrix}$$ رتبتها 2×3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$ رتبتها 1×3

$$C = \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \; 2 \times 1 \qquad D = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix} \; 1 \times 1 \qquad J = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 6 \\ 7 & -2 & 1 \\ 8 & 3 & 0 \end{bmatrix} \; 4 \times 3$$

الاعداد الموجودة في المصفوفة تدعى بعناصر المصفوفة (Elements)

مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 16 & 4 & 5 \\ 15 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$ رتبتها 3×3

ماذا يعني a_{12} ؟ يعني العنصر الموجود في الصف الاول والعمود الثاني $a_{12} = -2$

وكذلك a_{23} يعني العنصر الموجود في الصف الثاني والعمود الثالث

$a_{23} = 5$

وهكذا لبقية العناصر

ويمكن الكتابة بالصورة $A = [a_{ij}]$ حيث $i = 1, 2, 3, \dots m$

$j = 1, 2, 3, \dots n$

تعريف (2 - 3) تساوي مصفوفتين

يقال للمصفوفتين انهما متساويتين اذا وفقط اذا تحقق الشرطان :

1 - المصفوفتان لهما نفس الرتبة .

2 - عناصر المصفوفة الاولى تساوي نظائرها من عناصر المصفوفة الثانية .

مثلاً

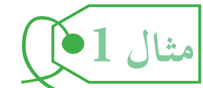
$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -0.5 \\ -4 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad 2\times2 \qquad A = \begin{bmatrix} 0.1 & -\frac{1}{2} \\ -4 & 0.75 \end{bmatrix} \quad 2\times2$$

نلاحظ : 1 : ان المصفوفتين A, B لهما نفس الرتبة 2×2

2 : $b_{12} = a_{12} = -0.5 = -\frac{1}{2}$ $\qquad b_{21} = a_{21} = -4$

اي انه كل عنصر في المصفوفة A يساوي نظيره في المصفوفة B

$\therefore \ A = B$



بين هل ان المصفوفتين

$$B = \begin{bmatrix} 6 & \sin\frac{\pi}{6} \\ \cos\frac{\pi}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 6 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0.25 \end{bmatrix}$$

متساويتان ؟

الحل

نلاحظ ان المصفوفتين B , A لها نفس الرتبة 2×2 وكذلك

$a_{12} = b_{12} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ $\qquad a_{11} = b_{11} = 6$

$a_{22} = b_{22} = 0.25 = \frac{1}{4}$ $\qquad b_{21} = a_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$

المصفوفتان B , A متساويتان ويقال $A = B$



مثال 2

هل ان المصفوفتين متساويتان في كل مما يأتي ؟

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \\ 0.8 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ \frac{4}{5} & \frac{10}{2} \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

الحل

a- $\because$ العنصر في الصف الاول العمود الاول في المصفوفة A هو 2

العنصر في الصف الاول العمود الاول في المصفوفة B هو 1

اي انه $b_{11} \neq a_{11}$ لذلك $A \neq B$

b - $\because$ رتبة المصفوفة A هي 2×2

ورتبة المصفوفة B هي 1×3

$\therefore$ المصفوفة $A \neq$ المصفوفة B



جد قيم x , y حيث $x , y \in R$ في كل مما يأتي :

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ y+8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2x-1 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 2x & 5 \\ 5y-1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4x & 2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} x+1 & -4 \\ 0 & 3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y-2 & -4 \\ 0 & y-1 \end{bmatrix}$

الحل

∵ المصفوفتان متساويتان ∴ العناصر المتناظرة في المصفوفتين متساويتين (1)

$\therefore\ 2x - 1 = 7$

$2x = 7 + 1$

$2x = 8$

$x = 4$

كذلك $y + 8 = 12$

$y = 12 - 8$

$y = 4$

∵المصفوفتان متساويتان ∴ العناصر المتناظرة في المصفوفتين متساويتين (2)

$\therefore 2x = 1$

$\therefore x = \frac{1}{2}$

كذلك $5y - 1 = 4x$

$5y = 1 + \cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow 5y = 1 + 2 \Rightarrow 5y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{5}$

∵المصفوفتان متساويتان

$\therefore\ x + 1 = y - 2$ وكذلك $3x = y - 1$

$x - y = -3 \quad ....1$

$3x - y = -1 \quad ....2$

$$\begin{array}{r} x - y = -3 \\ \mp 3x \pm y = \pm 1 \\ \hline -2x = -2 \end{array}$$

بالطرح

$\therefore x = \frac{-2}{-2}$

$x = 1$

نعوض في المعادلة (1) عن x

$1 - y = -3$

$-y = -4$

$y = 4$

[4 – 3] انواع المصفوفات

فيما يلي بعض انواع المصفوفات

1 – المصفوفة المربعة Square Matrix : هي مصفوفة تكون فيها عدد الصفوف m مساوي لعدد الاعمدة n اي انه m = n وتكون رتبة المصفوفة بالشكل m × m أو n × n مثلاً :

$$B=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 4\\ 5 & 2 & -1\\ 8 & 9 & 11\end{bmatrix} \quad 3\times3$$ مصفوفة مربعة

$$A=\begin{bmatrix}5 & -1\\ 8 & 7\end{bmatrix} \quad 2\times2$$ مصفوفة مربعة

2 – مصفوفة الصف Row Matrix : وهي مصفوفة تتكون من صف واحد فقط أي m = 1 مثلاً:

$A=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix} \quad 1\times2$ $\qquad B=\begin{bmatrix}-4 & 5 & 7 & 2\end{bmatrix} \quad 1\times4$

3 – مصفوفة العمود Colum Matrix : وهي مصفوفة تتكون من عمود واحد فقط أي : n = 1

مثلاً :

$$B=\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix} \quad 2\times1 \qquad A=\begin{bmatrix}-1\\ 8\\ 4\end{bmatrix} \quad 3\times1$$

4 – المصفوفة الصفرية Zero Matrix : وهي مصفوفة جميع عناصرها مساوية للصفر مثلاً:

$$C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad 1\times3 \qquad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad 2\times2 \qquad A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad 2\times3$$

5 – مصفوفة الوحدة Unit Matrix : هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها صفراً عدا عناصر القطر الرئيسي تساوي 1

[عناصر القطر الرئيسي هي $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots$]

مثلاً

$$C=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} \quad 1\times1 \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad 2\times2 \qquad A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad 3\times3$$

[5 - 3] جمع المصفوفات Addition of Matrix

لاحظ المثال الاتي : لدينا ثلاث طلاب متفوقين اشتركوا في اختبارات لأسئلة الذكاء وهي اسئلة علمية واسئلة رياضية واسئلة ثقافية وكانت درجاتهم في الاختبارات كالآتي :

	اسئلة علمية	اسئلة ثقافية	اسئلة رياضية
الطالب الاول	7	6	8
الطالب الثاني	9	7	9
الطالب الثالث	8	9	7

لمعرفة اي من الطلاب الثلاث فاز بالاختبارات وحصل على أعلى الدرجات نجمع الدرجات وكالآتي :

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+6+7 \\ 9+7+9 \\ 7+9+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 25 \\ 24 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان الطالب الثاني حصل على اعلى الدرجات وهي 25 ويعتبر الفائز ، لذلك عندما يراد جمع مصفوفتين يقتضي ان تكون لهما نفس الرتبة ثم نجمع كل عنصر في المصفوفة الاولى مع نظيره في المصفوفة الثانية .

تعريف (3-3)

اذا كانت $A = [\,aij\,]$, $B = [\,bij\,]$ مصفوفتين لهما نفس الرتبة $m \times n$

فان $A + B = [\,aij + bij\,]$

مثال 4

جد ناتج ما يلي :

1 – $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

2 – $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{3}{2} \\ 0.4 & 0.01 \end{bmatrix}$

3 – $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 8 & \sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -1 \\ 5 & 4\sqrt{3} \end{bmatrix}$

الحل

1 - $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & -1+8 \\ 5+2 & 4+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

2 - $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{3}{2} \\ 0.4 & 0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}+\frac{7}{3} & \frac{1}{2}+\frac{3}{2} \\ 0.5+0.4 & 0.3+0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{4}{2} \\ 0.9 & 0.31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 2 \\ 0.9 & 0.31 \end{bmatrix}$

3 - $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 8 & \sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -1 \\ 5 & 4\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & -4 \\ 13 & 5\sqrt{3} \end{bmatrix}$




مثال 5

اذا علمت ان

$$\begin{bmatrix} 3 & x \\ 5 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

جد قيمتي x , y حيث $x , y \in R$

الحل

$$\begin{bmatrix} 3+4 & x+2 \\ 5-1 & y+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$y + 3 = 2$ وكذلك $x + 2 = 6$

$y = 2 - 3$ وكذلك $x = 6 - 2$

$y = -1$ وكذلك $x = 4$



اذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

جد كل من : $3 -\ B + C$ $\quad 2 -\ A + C$ $\quad 1 -\ A + B$

الحل

$$1-\quad A + B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+1 & 5+(-2) \\ 2+4 & -1+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$2-\quad A + C = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+0 & 5+8 \\ 2+4 & -1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 13 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3-\quad B + C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

[6 – 3] نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الجمع

اذا كانت المصفوفة $A = [\,aij\,]$ فأن $-A = [\,-aij\,]$ تسمى بالنظير الجمعي للمصفوفة A

مثلاً اذا كانت $A_{2\times 2}$ مصفوفة فأن $-A_{2\times 2}$ تسمى نظير المصفوفة A بالنسبة لعملية الجمع حيث

$$A + (-A) = (-A) + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اي انه إذا كان ناتج جمع مصفوفتين هو مصفوفة صفرية فيقال ان احدى المصفوفتين هي نظير المصفوفة الاخرى بالنسبة لعملية الجمع وتسمى المصفوفة الصفرية بالمصفوفة المحايدة في عملية الجمع (Neutral Matrix).

مثال 7

ما هو النظير الجمعي للمصفوفات الآتية ؟

1) $A = \begin{bmatrix} -0.8 & 2 \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ 2) $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

الحل

1 / ∵ $A = \begin{bmatrix} -0.8 & 2 \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$

∴ نظير المصفوفة A بالنسبة لعملية الجمع هي المصفوفة A −

$$-A = \begin{bmatrix} 0.8 & -2 \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

لانه $A + (-A) = \begin{bmatrix} -0.8 + 0.8 & 2 + (-2) \\ \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) & -1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2/ ∵ المصفوفة $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ فأن نظيرها الجمعي $-B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ -3 & 4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

لانه $B + (-B) = \begin{bmatrix} -2 + 2 & 5 + (-5) & 1 + (-1) \\ 3 + (-3) & -4 + 4 & \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وكذلك $-B + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ملاحظة

1 − عند ايجاد النظير الجمعي لأي مصفوفة نغير اشارة كل عنصر في المصفوفة اي انه نأخذ النظير الجمعي لكل عنصر في المصفوفة.

2 − اذا كانت A , B مصفوفتان لهما نفس الرتبة فأن $A - B = A + (-B)$

[7 – 3] خواص عملية الجمع على المصفوفات

1 – عند جمع مصفوفتين لهما نفس الرتبة $m \times n$ فالناتج هو مصفوفة لها نفس الرتبة $m \times n$ مثلاً:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times3} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & -7 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 9 & 4 & -2 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

2 – عملية جمع مصفوفتين تتمتع بخاصية الابدال (Commutative) اذا كان A, B مصفوفتان لهما نفس الرتبة $m \times n$ فان $A + B = B + A$ لانه :

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \quad a_{ij}, b_{ij} \in R$$

وتتمتع بخواص جمع الاعداد الحقيقية $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = A + B = B + A \therefore$



ليكن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

نلاحظ

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 + (-4) & 2 + 7 \\ 1 + 5 & 0 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

وكذلك

$$B + A = \begin{bmatrix} -4 + 3 & 7 + 2 \\ 5 + 1 & 8 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

اي انه $A + B = B + A$

3 – عملية جمع المصفوفات تتمتع بخاصية التجميع (Associative) اذا كانت A, B, C مصفوفات لها نفس الرتبة $m \times n$ فأن :

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$



لتكن

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

جد :

1/ $(A + B) + C$

2/ $A + (B + C)$

الحل

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}-4+0 & 2+(-2)\\ 5+3 & 1+7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -3 & 8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 8 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -3 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4+(-4) & 0+1\\ 8+(-3) & 8+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 1\\ 5 & 16\end{bmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 5 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0+(-4) & -2+1\\ 3+(-3) & 7+8\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 5 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -1\\ 0 & 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4+(-4) & 2+(-1)\\ 5+0 & 1+15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 1\\ 5 & 16\end{bmatrix}$$

نلاحظ من 2 ، 1 أن : $(A+B)+C=A+(B+C)$

4 – وجود المصفوفة المحايدة في عملية الجمع وهي المصفوفة الصفرية :

لتكن A مصفوفة من الرتبة $m\times n$ توجد مصفوفة صفرية من الرتبة $m\times n$ فأن

A = A + المصفوفة الصفرية $m\times n$ = المصفوفة الصفرية $m\times n$ + A

مثلاً لتكن

$A=\begin{bmatrix}-\sqrt{5} & 4\\ 6 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix}$ نلاحظ ان المصفوفة $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ محايدة

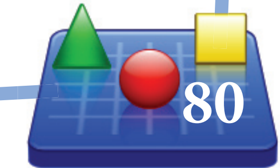
$$\begin{bmatrix}-\sqrt{5} & 4\\ 6 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{5}+0 & 4+0\\ 6+0 & -2+0\\ 5+0 & 1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{5} & 4\\ 6 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

وكذلك

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\sqrt{5} & 4\\ 6 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{5} & 4\\ 6 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

5 – وجود النظير الجمعي للمصفوفة (Additive Inverse) :

اذا كانت A مصفوفة من الرتبة $m\times n$ توجد مصفوفة $-A$ من نفس الرتبة $m\times n$ تسمى بالنظير الجمعي للمصفوفة A حيث $A+(-A)=(-A)+A=0$, 0 مصفوفة صفرية من الرتبة $m\times n$



[8 – 3] ضرب المصفوفة بعدد حقيقي

لاحظ عزيزي الطالب هذا المثال

محل لبيع المرطبات وضع قائمة تمثل الاسعار (بالألف دينار) لانواع واحجام المرطبات التي يبيعها وهي كالآتي:

	قدح كبير	قدح وسط	قدح صغير
بالكاكاو	5	3.5	2.5
مشكل	4.5	3	2
حليب بالفستق	6	4	3

اراد ان يرفع اسعار المرطبات . اقترح ان يضرب هذه الاسعار بالعدد 1.5 فحصل على الجدول الآتي:

	قدح كبير	قدح وسط	قدح صغير
بالكاكاو	7.5	5.25	3.75
مشكل	6.75	4.5	3
حليب بالفستق	9	6	4.5

اي انه ضرب كل عدد في القائمة بالعدد 1.5 وحصل على هذه الاسعار.

تعريف (3-4)

اذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الرتبة $m \times n$ و $k \in R$

فإن $k . A = [k . a_{ij}]$

مثال 10

جد ناتج

$$3\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ \frac{1}{3} & 4 \end{bmatrix}$$

الحل

$$3\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ \frac{1}{3} & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times (-2) & 3 \times 7 \\ 3 \times \frac{1}{3} & 3 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 21 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$$



اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 5 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad , \quad L = -2 \ ، \ K = \sqrt{2}$$

جد :

1 / K . A 2 / L . A 3 / KL . A

الحل

$$1/ \quad K . A = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 5 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \times 5 \\ \sqrt{2} \times 1 & \sqrt{2} \times \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

$$2/ \quad L . A = -2\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 5 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \times 3\sqrt{2} & -2 \times 5 \\ -2 \times 1 & -2 \times \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\sqrt{2} & -10 \\ -2 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$3/ \quad K L . A = \sqrt{2} \times (-2)\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 5 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \times 5 \\ -2\sqrt{2} \times 1 & -2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -10\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -4 \end{bmatrix}$$

إلى ابي وامي .. ساهما في حماية البيئة لتضمنا لي مستقبل افضل.

[1 – 8 – 3] بعض الخواص لعملية ضرب عدد في مصفوفة

ليكن A , B مصفوفتين لهما نفس الرتبة . $K , L \in R$

1/ $K [A + B] = K A + K B$

2/ $(K L) A = K (L A)$

3/ $(K + L) A = K A + L A$

4/ $K A = K B$ $K \neq 0$ فأن $A = B$

5/ $K A =$ مصفوفة صفرية فأن $K = 0$ أو A مصفوفة صفرية

مثال 12

جد المصفوفة A اذا علمت ان

$$-5 \left(A - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = -6A + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل

$$-5A + 5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -6A + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$-5A + \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = -6A + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$6A - 5A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 + (-5) & 1 + (-5) \\ -1 + 5 & 5 + 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

تمارين [3 – 1]

س1 : جد قيمتي x , y حيث $x , y \in R$ في كل مما يأتي :

1) $\begin{bmatrix} 3x+y & 0.2 \\ 3\sqrt{2} & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & \frac{1}{5} \\ 3\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} \sin x & 3 \\ -2 & \cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 3 \\ -2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} x^2 & 6 \\ y^2 - y & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 15 & 4 \end{bmatrix}$

س2 : جد ناتج ما يلي :

1) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ -11 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

2) $4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & -\frac{1}{4} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & \frac{1}{8} \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{3} \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1.6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0.9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

س3 : جد المصفوفة x في كل مما يأتي :

1) $2x + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

2) $x - \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 6 & -1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 6 & 8 & -2 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

س4 : اذا كانت $C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ جد المصفوفات الاتية :

1) $2A + 3B + C$

2) $A - B + 5C$

3) $3A + B + C$

4) $-A + 2B - C$



3 - 9 المحددات وخواصها Determinants and their properties

محدد المصفوفة **The Determinant of A Matrix** : هو عدد حقيقي يستخرج من المصفوفة المربعة.

تعريف

لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فأن $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ يسمى محدد المصفوفة ويرمز له Δ وأن

عدد حقيقي $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

مثال 13

جد قيمة كل مما يأتي :

1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 2 & 3\sqrt{2} \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}$

الحل

1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - 1 \times (-2) = 12 + 2 = 14$

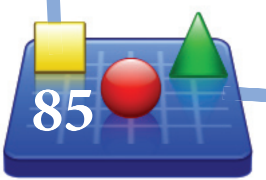
2) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 2 & 3\sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} - (-3) \times 2 = 6 + 6 = 12$

3) $\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} - 3 \times 1 = \frac{3}{8} - 3 = \frac{3-24}{8} = -\frac{21}{8}$

4) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 3 \times 10 - 5 \times 6 = 30 - 30 = 0$

ملاحظة

اذا كان محدد مصفوفة ما يساوي صفراً فتسمى المصفوفة بالمصفوفة المنفردة (**Singular Matrix**)



مثال 14

جد قيمة h في كل مما يأتي $h \in R$

1) $\begin{vmatrix} 2h+3 & -1 \\ 2 & h \end{vmatrix} = 1$

الحل

$$(2h+3)\times h - (-1)\times 2 = 1$$
$$2h^2 + 3h + 2 = 1$$
$$2h^2 + 3h + 2 - 1 = 0$$
$$2h^2 + 3h + 1 = 0$$
$$(2h+1)(h+1) = 0$$
$$\therefore 2h + 1 = 0 \quad \text{or} \quad h + 1 = 0$$
$$2h = -1 \qquad h = -1$$
$$h = -\frac{1}{2}$$

2) $\begin{vmatrix} 3h & -2 \\ 3 & h \end{vmatrix} = 9$

الحل

$$3h^2 + 6 = 9$$
$$3h^2 = 9 - 6$$
$$h^2 = \frac{3}{3}$$
$$h^2 = 1$$
$$\therefore h = \mp 1$$

[3 – 10] المعادلات الآنية Simultaneous Equations

تستخدم المحددات في حل معادلتين من الدرجة الاولى ذات متغيرين حيث

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

اعدادحقيقية $a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times b_2 \\ \times b_1 \end{array}$$

نحصل

$$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2$$
$$\mp a_2 b_1 x \mp b_1 b_2 y = \mp c_2 b_1$$ بالطرح

$$a_1 b_2 x - a_2 b_1 x = c_1 b_2 - c_2 b_1$$
$$x [a_1 b_2 - a_2 b_1] = c_1 b_2 - c_2 b_1$$
$$x = c_1 b_2 - c_2 b_1 / a_1 b_2 - a_2 b_1$$

لكن $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

ويمثل محدد مصفوفة معاملات المتغيرين x , y في المعادلتين . وكذلك

$$c_1 b_2 - c_2 b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta x$$

ويمثل محدد مصفوفة المعاملات المطلقة (الطرف الايسر) ومعاملات المتغير y في المعادلتين . لذلك :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

وبنفس الطريقة السابقة يمكن ان ضرب المعادلة الاولى بالمعامل a_2 والمعادلة الثانية بالمعامل a_1 ونكمل الحل بالطرح نحصل على :

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

ويسمى $\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$\therefore y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$

(وتسمى هذه الطريقة بطريقة كرامر)

نلاحظ قبل تطبيق القانون يجب ان تكون المعادلتين مرتبتين بحيث تكون الحدود التي فيها المتغيرين x ، y في الطرف الايسر والمتشابهة احدهما تحت الاخر والعدد الخالي من المتغيرين (العدد المطلق) في الطرف الايمن.



حل المعادلتين الآنيتين بطريقة المحددات (كرامر)

$$5x - 2y - 11 = 0 \ , \ 2x + 3y = 12$$

الحل

نرتب المعادلتين اولاً وكما يلي:

$$5x - 2y = 11$$

$$2x + 3y = 12$$

نجد

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \times 3 - (-2) \times 2 = 15 + 4 = 19$$

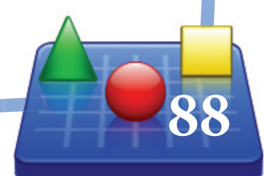
$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 11 \times 3 - (-2) \times 12 = 33 + 24 = 57$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 5 \times 12 - 11 \times 2 = 60 - 22 = 38$$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{57}{19} = 3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{38}{19} = 2$$

$$\therefore x = 3 \ , \ y = 2$$



مثال 16

جد قيمتي y ، x التي تحقق حل المعادلتين الآنيتين بطريقة كرامر :

$$3x + 5y = -1$$
$$x + 2y = 0$$

الحل نلاحظ ان المعادلتين مرتبتين:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-1 \times 2 - 5 \times 0}{3 \times 2 - 5 \times 1} = \frac{-2-0}{6-5} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3 \times 0 - (-1) \times 1}{1} = \frac{0+1}{1} = 1$$

$$\therefore \quad x = -2 \quad , \quad y = 1$$



مثال 17

حل المعادلتين الآتيتين آنياً بطريقة كرامر :

$$5x - 2y - 3 = 0 \quad , \quad y - 3 = x$$

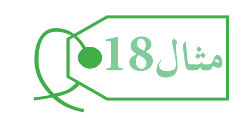
الحل نرتب المعادلتين

$$5x - 2y = 3$$
$$-x + y = 3$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3+6}{5-2} = \frac{9}{3} = 3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{5 - 2} = \frac{15-(-3)}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$\therefore \quad x = 3 \quad , \quad y = 6$$



مثال 18

حل المعادلتين آنياً بطريقة كرامر :

$$2x + 5y = 12 \quad , \quad 4x + 3y = 10$$

الحل نلاحظ ان المعادلتين مرتبتين ، نجد :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{12 \times 3 - 5 \times 10}{2 \times 3 - 5 \times 4} = \frac{36 - 50}{6 - 20} = \frac{-14}{-14} = 1$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{2 \times 10 - 12 \times 4}{-14} = \frac{20 - 48}{-14} = \frac{-28}{-14} = 2$$

$$\therefore \quad x = 1 \ , \ y = 2$$

[3 – 11] محددات المصفوفة المربعة 3x3

يمكن ايضاً ايجاد محدد المصفوفة المربعة 3x3 وبالشكل :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

والتي هي :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$



جد قيمة

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -2 [1 \times 0 - 2 \times (-3)] - 5 \times [3 \times 0 - 2 \times 4] + 4 \times [3 \times (-3) - 1 \times 4]$$

$$= -2 [0 + 6] - 5 [0 - 8] + 4 [-9 - 4]$$

$$= -12 + 40 - 52 = -24$$

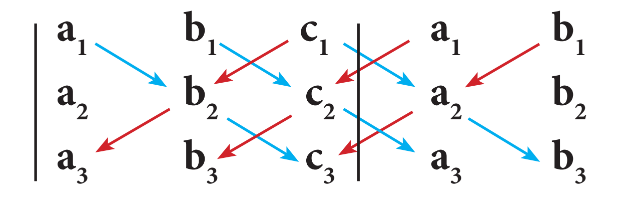
توجد طريقة أخرى لايجاد محدد المصفوفة 3×3 وكما يلي :

1 / نكرر كتابة العمودين الاول والثاني

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

نحدد الاقطار الرئيسية بأسهم وبلون يختلف عن لون الاقطار المعاكسة

2 / نجد حاصل ضرب عناصر الاقطار الرئيسية الثلاث والتي هي : $a_1\ b_2\ c_3\ ,\ b_1\ c_2\ a_3\ ,\ c_1\ a_2\ b_3$



3 / نجد H_1 الذي يمثل مجموع النواتج الثلاث :

$$H_1 = a_1\ b_2\ c_3 + b_1\ c_2\ a_3 + c_1\ a_2\ b_3$$

4 / نجد حاصل ضرب عناصر الاقطار المعاكسة الثلاث والتي هي :

$$c_1\ b_2\ a_3\ ,\ a_1\ c_2\ b_3\ ,\ b_1\ a_2\ c_3$$

5 / نجد H_2 ويمثل مجموع النواتج الثلاث :

$$H_2 = c_1\ b_2\ a_3 + a_1\ c_2\ b_3 + b_1\ a_2\ c_3$$

واخيراً :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = H_1 - H_2$$

سنحل المثال السابق بالطريقة الثانية :

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{matrix}$$

نجد H_1 حيث :

$$H_1 = [(-2 \times 1 \times 0) + (5 \times 2 \times 4) + (4 \times 3 \times (-3))]$$
$$= 0 + 40 - 36 = 4$$

$$H_2 = [(4 \times 1 \times 4) + ((-2) \times 2 \times (-3)) + (5 \times 3 \times 0)]$$
$$= 16 + 12 + 0 = 28$$

$$\therefore \begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = H_1 - H_2 = 4 - 28 = -24$$

ملاحظة

سوف نعتمد في ايجاد قيمة محدد المصفوفة 3×3 على الطريقة الثانية



جد قيمة :

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -8 \\ -5 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -8 \\ -5 & 2 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -2 \\ 6 & 4 \\ -5 & 2 \end{matrix}$$

$$H_1 = [(3 \times 4 \times 8) + ((-2) \times (-8) \times (-5)) + (4 \times 6 \times 2)]$$
$$= 96 - 80 + 48 = 64$$

$$H_2 = [(4 \times 4 \times (-5)) + (3 \times (-8) \times 2) + ((-2) \times 6 \times 8)]$$
$$= -80 - 48 - 96 = -224$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -8 \\ -5 & 2 & 8 \end{vmatrix} = H_1 - H_2 = 64 - (-224) = 288$$



جد قيمة

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$



$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

نجد $H_1 = (1 \times (-3) \times 5) + (2 \times 0 \times 3) + (3 \times (-2) \times 2)$

$= -15 + 0 - 12 = -27$

$H_2 = (3 \times (-3) \times 3) + (1 \times 0 \times 2) + (2 \times (-2) \times 5)$

$= -27 + 0 \; -20 = -47$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = H_1 - H_2 = (-27) - (-47) = -27 + 47 = 20$$

[12 – 3] استخدام المحددات في حل ثلاث معادلات آنياً من الدرجة الاولى بثلاث متغيرات وتسمى طريقة كرامر

تعلمنا سابقاً حل معادلتين آنياً وبطريقة المحددات (كرامر) وفي موضوعنا هذا سنتعلم كيفية حل ثلاث معادلات من الدرجة الاولى وبثلاث متغيرات بأستخدام المحددات وكما يلي :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = h_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = h_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = h_3$$

يمكن بعد ضرب المعادلات بمعاملات عددية وبطريقة الحذف كما سبق في حل المعادلتين الآنيتين يمكن الحصول على القوانين الآتية لايجاد قيم x , y , z

هي محدد مصفوفة معاملات x , y , z في الطرف الايمن

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Δx هي مشابه محدد Δ بحيث تحل المعاملات العددية في الطرف الايسر بدلاً من عمود معاملات x

Δy هي مشابه محدد Δ بحيث تحل المعاملات العددية في الطرف الايسر بدلاً من عمود معاملات y

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

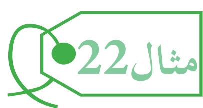
Δz هي محدد المصفوفة التي تمثل مصفوفة Δ بحيث تحل المعاملات العددية في الطرف الايسر بدلاً من عمود معاملات z

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

ملاحظة

1- يجب ترتيب حدود المعاملات بحيث المعاملات العددية في الطرف الايمن والحدود التي تحتوي x ، y , z في الطرف الايسر ومرتبة بنفس الطريقة في المعاملات الثلاث .

2- إذا كانت قيمة Δ = صفر في حل معادلتين آنياً أو ثلاث معادلات فإن المعادلات ليس لها حل في R .



حل المعادلات الثلاث وبطريقة المحددات في كل مما يأتي :

1) $x + 4y + 3z = 1$

$2x + 5y + 4z = 4$

$x - 3y - 2z = 5$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & -3 \end{matrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{matrix}}$$

$$x = \frac{[-10+80-36]-[75+(-12)-32]}{[-10+16-18]-[15-12-16]} = \frac{34-31}{-12+13} = \frac{3}{1} = 3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right.}{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right.}$$

$$y = \frac{[-8+4+30]-[12+20-4]}{[-10+16-18]-[15-12-16]} = \frac{26-28}{-12+13} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 5 & 1 & -3 \end{array}\right.}{\Delta}$$

$$z = \frac{[25+16-6]-[5-12+40]}{1} = \frac{35-33}{1} = 2$$

$x = 3 \;, y = -2 \;, z = 2$

2) $y - 2x + 3 = z \quad , \quad 3x - 4 = 2y - 2z \quad , \quad x + y + z = 9$

الحل نرتب المعادلات الثلاث وكالآتي:

$$-2x + y - z = -3$$
$$3x - 2y + 2z = 4$$
$$x + y + z = 9$$

اولاً نجد قيمة Δ حيث

$$\Delta = \left| \begin{matrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\Delta = [\, 4 + 2 + (-3) \,] - [\, 2 + (-4) + 3 \,] = 3 - 1 = 2$$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\left| \begin{matrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right|}{2} = \frac{\left| \begin{matrix} -3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \\ 9 & 1 \end{matrix}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{[\, 6 + 18 + (-4) \,] - [\, 18 + (-6) + 4 \,]}{2} = \frac{20 - 16}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\left| \begin{matrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{matrix} \right|}{2} = \frac{\left| \begin{matrix} -2 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \\ 1 & 9 \end{matrix}}{2}$$

$$y = \frac{[\, -8 + (-6) + (-27) \,] - [\, (-4) + (-36) + (-9) \,]}{2} = \frac{-41 + 49}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & h_1\\ a_2 & b_2 & h_2\\ a_3 & b_3 & h_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 1 & -3\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & 9\end{vmatrix}\begin{matrix}-2 & 1\\ 3 & -2\\ 1 & 1\end{matrix}}{2}$$

$$z=\frac{[36+4+(-9)]-[6+(-8)+27]}{2}=\frac{31-25}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$\therefore\ x=2\ ,\ y=4\ ,\ z=3$$

3) $2x-4y+5z=5\quad,\quad x+3y-2z+10=0\quad,\quad -3x-2y-4z+6=0$

الحل

نرتب المعادلات أولاً وكما يلي :

$$\begin{aligned}2x-4y+5z&=5\\ x+3y-2z&=-10\\ -3x-2y-4z&=-6\end{aligned}$$

نجد

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -4 & 5\\ 1 & 3 & -2\\ -3 & -2 & -4\end{vmatrix}\begin{matrix}2 & -4\\ 1 & 3\\ -3 & -2\end{matrix}$$

$$\Delta=[-24+(-24)+(-10)]-[-45+8+16]=[-58]-[-21]=-37$$

ثم نجد كلاً من x و y و z وكما يلي:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -10 & 3 & -2 \\ -6 & -2 & -4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 5 & -4 \\ -10 & 3 \\ -6 & -2 \end{matrix}}{-37}$$

$$x = \frac{[-60+(-48)+100] - [-90+20+(-160)]}{-37} = \frac{[-8]-[-230]}{-37} = \frac{222}{-37} = -6$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & -10 & -2 \\ -3 & -6 & -4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 5 \\ 1 & -10 \\ -3 & -6 \end{matrix}}{-37} = \frac{[80+30+(-30)]-[150+24+(-20)]}{-37}$$

$$y = \frac{80-154}{-37} = \frac{-74}{-37} = 2$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & -10 \\ -3 & -2 & -6 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{matrix}}{-37} = \frac{[-36+(-120)+(-10)]-[-45+40+24]}{-37}$$

$$z = \frac{-166-19}{-37} = \frac{-185}{-37} = 5$$

$\therefore\ x = -6 \quad , y = 2 \quad , \quad z = 5$

تمارين [2 - 3]

س1 : جد قيمة كل مما يأتي وبين اي منها هو محدد لمصفوفة منفردة :

1) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 5 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -8 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

س2 : حل المعادلات الآتية وجد قيمة x في كل مما يأتي :

1) $\begin{vmatrix} 3x & 3 \\ 9 & 4x \end{vmatrix} = 0$ 2) $\begin{vmatrix} x & x \\ x-1 & x-5 \end{vmatrix} = 8$ 3) $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3$

س3 : حل المعادلتين الانيتين في كل مما يأتي وبطريقة كرامر :

1) $5x + 3 = 4y \quad , \quad 3x + y = 5$

2) $2x - 3 = 3y \quad , \quad x - 1 = 2y$

3) $4y + 2x = 0 \quad , \quad 3x + 5y = -1$

4) $2x + 3y = 6 \quad , \quad x + y = 1$

س4 : حل المعادلات الثلاث بايجاد قيم x , y , z وبطريقة المحددات في كا مما يأتي :

1) $3x + y - z = 2 \quad , \quad 2x + 3y + z = 11 \quad , \quad x - y + 3z = 8$

2) $4y + z = 0 \quad , \quad 2x + z = -8 \quad , \quad 5x + 6y = 2z + 4$

3) $x + 3y = 2z - 2 \quad , \quad 4x + 2y = z - 3 \quad , \quad 2x - y + z = 0$

4) $3x + y - z = -1 \quad , \quad 5x + 2y + z = 8 \quad , \quad x - 3y - 4z = -5$

الفصل الرابع
CHAPTER 4

Statistics الاحصــــاء

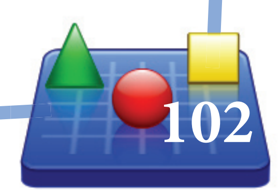
[4-1] مقدمــــة

كلمة الإحصاء تعني علم جمع البيانات وتحليلها وتفسيرها ، ولعلم الاحصاء مجالان رئيسان : (الاحصاء الوصفي) الذي يهتم بوصف البيانات و(الاحصاء الاستدلالي) الذي يهتم بتفسير البيانات وتحليلها بهدف الوصول الى استنتاجات او تنبؤات منها .

للاحصاء دور مهم وفعال في حل كثير من المشاكل : الادارية والاقتصادية والحياتية والطبية وغيرها ..... ولاهمية هذا الدور يتوجب علينا دراسته وفهم حقيقته .

لقد استخدم البابليون (1800 قبل الميلاد) الواحاً من الطين كسجلات للغلال الزراعية وما يجنونه من بيعها كما ان المصريون القدماء جمعوا بيانات عن اعداد مواطنيهم وثرواتهم قبل بناءهم للاهرامات نحو القرن الحادي والثلاثون قبل الميلاد .

وكان للحضارة الرومانية اول حكومة قامت بجمع البيانات وتحليلها حول اعداد السكان ومساحات المناطق التي تقع تحت سيطرة الرومان والثروات الحيوانية والزراعية والمعدنية المتوفرة فيها .



[4-2] مقاييس التشتت Measures of Disperssion

(مراجعة)

لكل مجموعة من الاعداد وسطاً حسابياً وان اعداد هذه المجموعة ربما تكون مجتمعة بالقرب منه او مبتعدة عنه فاذا كانت هذه الاعداد متجمعة بالقرب من وسطها الحسابي فان مقدار تشتتها ضئيل . واذا كانت هذه الاعداد مبتعدة عن وسطها الحسابي فان تشتتها كبير .

ومن مقاييس التشتت المدى(Range) ، والانحراف المعياري (Standard Deviation) والانحراف المتوسط والتباين . وسندرس الانحراف المعياري

[4-2-1] الانحراف المعياري Standard Deviation

يعرف الانحراف المعياري بانه الجذر التربيعي لمتوسط مجموع انحرافات قيم المتغير عن وسطها الحسابي (Arithmetic Mean) وسنرمز للانحراف المعياري بالرمز (S) .

حساب الانحراف المعياري

1) نستخرج الوسط الحسابي($\overline{x}$)لتلك القيم

2) نستخرج انحراف كل قيمة عن وسطها الحسابي($x-\overline{x}$)

3) نربع الانحرافات $(x-\overline{x})^2$

4) نستخرج مجموع مربع الانحرافات $\Sigma\ (x-\overline{x})^2$

5) نقسم الناتج على عدد القيم $\dfrac{\Sigma\ (x-\overline{x})^2}{n}$

6) ناخذ الجذر التربيعي الموجب للناتج الاخير في حالة عدم وجود تكرار

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma\ (x-\overline{x})^2}{n}} \quad \text{أو} \quad S = \sqrt{\frac{\Sigma\ x^2}{n} - (\overline{x})^2}$$

7) في حالة وجود تكرارات .

حيث أن f تمثل التكرارات

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i \ (x_i - \overline{x})^2}{\sum f_i}}$$



أحسب الانحراف المعياري للبيانات 9،7،5،3،1

الحل

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+5+7+9}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

x	$x-\overline{x}$	$(x-\overline{x})^2$
1	−4	16
3	−2	4
5	0	0
7	2	4
9	4	16
25		40

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{40}{5}} = 2\sqrt{2}$$



أحسب الانحراف المعياري لمجموعة من الاشخاص من الجدول التالي

الفئات	12-	22-	32-	42-	52-	62-72
التكرار f	3	5	8	4	2	1

الحل

$f(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^2$	$x-\bar{x}$	f x	x مركز الفئة	f	الفئات
1200	400	-20	51	17	3	12-
500	100	-10	135	27	5	22-
0	0	0	296	37	8	32-
400	100	10	188	47	4	42-
800	400	20	114	57	2	52-
900	900	30	67	67	1	62-72
3800			851		23	

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{851}{23} = 37$$

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{\Sigma f_i}} = \sqrt{\frac{3800}{23}} = \sqrt{165.2} = 12.8$$

تمارين (1 – 4)

س1 / جد الوسط الحسابي للقيم التالية 12 ، 11 ، 9 ، 8 ، 5

س2 / من الجدول التالي .احسب الوسط الحسابي

12	11	9	8	العمر
2	4	5	3	عدد الاشخاص

س3 / إحسب الانحراف المعياري للقيم 5،4،1،2،3

س4 / لدينا الجدول التالي

44–48	–40	–36	–32	–28	–24	–20	الفئة
8	12	6	8	5	7	4	التكرار

اوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري



[4-3] الارتباط correlation

المقدمة

لقد استخدمنا سابقاً الطرق والاساليب المختلفة في جمع وتصنيف وتبويب البيانات وكذلك إستخراج بعض المقاييس التي تعطي فكرة اكثر وضوحاً مثل مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت إن هذه الطرق والاساليب إستندت على البيانات المجمعة من متغير واحد فقط سواء كانت هذه البيانات مبوبة في توزيع تكراري ام غير ذلك وفي أحوال كثيرة نحتاج دراسة متغيرين او اكثر في ان واحد.

[4-3-1] الارتباط الخطي Linear correlation

إن مفهوم الارتباط الخطي يقترن بحالة وجود متغيرين أو اكثر تقترن مع بعضها بعلاقات خطية معينة على سبيل المثال العلاقة بين طول الشخص (cm) وكتلته (Kgm). العلاقة بين تحصيل الطالب المتخرج من الكلية والمستوى المعاشي لاسرته .العلاقة بين نسبة الشفاء من مرض معين وكمية الجرعة التي تناولها من الدواء.

إذا كان المتغيرين المرتبطين يتغيران بنفس الاتجاه اي زيادة او نقصان في احدهما يؤدي الى زيادة او نقصان في الاخر ويقال ان الارتباط موجب (طردي) على سبيل المثال زيادة طول شخص يتوقع ان يقابلها زيادة في وزنه. وانخفاض في دخل الفرد يتوقع منه إنخفاض في أنفاقه على بعض السلع. أما اذا كان المتغيرين المرتبطين يتغيران باتجاه معاكس زيادة او نقصان في احدهما يؤدي الى نقصان أو زيادة في الاخر عندئذ يقال ان الارتباط بينهما سالب (عكسي) وعلى سبيل المثال. زيادة في سعر الوحدة من سلعة معينة يتوقع ان يؤدي إلى انخفاض في الطلب على تلك السلعة . وان إنخفاض في درجات الحرارة يتوقع ان يؤدي الى زيادة الطلب على الوقود . ويقال إن الارتباط بين متغيرين تام (perfect) إذا كان التغير في احدهما متناسب مع التغير في الاخر ومثال على ذلك . الارتباط بين درجة الحرارة المئوية ودرجة الحرارة الفهرنهايتية هو ارتباط تام .

$$F = \frac{9}{5} C + 32^{\circ}$$

ويتم حساب الارتباط من خلال معامل الارتباط

[4-4] معامل الارتباط correlation coefficient

يعرف معامل الارتباط بانه درجة او قيمة العلاقة التي تربط بين متغيرين او اكثر مع بعض وهي قيمة حقيقية خالية من وحدات قياس المتغيرات المرتبطة بعلاقة .

[4-4-1] معامل الارتباط الخطي البسيط simple correlartion coefficient

يعرف الارتباط الخطي البسيط بأنه الدرجة او القيمة العددية للعلاقة بين متغيرين فقط .

[4-4-2] معامل الارتباط بيرسون

يعد معامل الارتباط بيرسون من معاملات الارتباط التي تستخدم في حساب العلاقة بين متغيرين متصلين وعلى سبيل المثال الطلبة الذين يحصلون على درجات عالية في الامتحانات المدرسية فانهم يحصلون على درجات عالية في الامتحانات الوزارية . والعلاقة بين تحصيل الطلبة في مادة الرياضيات وبين قدراتهم على حل المشكلات . والعلاقة بين التحصيل العلمي والذكاء ويرمز لمعامل الارتباط (r) ، فاذا كان لدينا n من ازواج القيم (x_n , y_n) ، ... (x_2, y_2) ، (x_1,y_1) من الظاهرتين (x) ، (y)

فان معامل الارتباط بيرسون يحسب باحدى الصيغتين :

$$1)\ r = \frac{\frac{1}{n} \Sigma (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_X \cdot S_Y}$$

$$2)\ r = \frac{\frac{1}{n} \Sigma x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y}}{S_X \cdot S_Y}$$



حيث (r) معامل ارتباط بيرسون

$\bar{X}$ = الوسط الحسابي للظاهرة X

$\bar{Y}$ = الوسط الحسابي للظاهرة Y

S_X = الانحراف المعياري للظاهرة X

S_Y = الانحراف المعياري للظاهرة Y

ولحساب معامل الارتباط نتبع :-

1) نجد الوسط الحسابي للظاهرتين x , y

2) نجد الانحراف المعياري لكل منهما

3) مجموع حواصل ضرب كل من الظاهرتين $\Sigma(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})$ او $\Sigma X_i Y_i$

ومن ثم نطبق احدى الصيغتين .

خصائص معامل الارتباط

1) $1 \geq r \geq -1$

2) عندما تكون r = +1 الارتباط طردي تام

3) عندما تكون r = -1 الارتباط عكسي تام

4) عندما تكون r = 0 انعدام الارتباط

5) عندما تكون r بين 0.5 و 0.75 طردي متوسط

6) عندما تكون r تزيد على 0.75 طردي قوي

7) عندما تكون r اقل من 0.5 طردي ضعيف



جد معامل الارتباط بين المتغيرين x ، y من الجدول الاتي :

x	2	3	4	5	6
y	4	6	8	10	12

نحسب الوسط الحسابي لكل من المتغيرين

$$\overline{X} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{6+5+4+3+2}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\overline{Y} = \frac{\Sigma y_i}{n} = \frac{12+10+8+6+4}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

X	Y	$X-\overline{X}$	$(X-\overline{X})^2$	$Y-\overline{Y}$	$(Y-\overline{Y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
2	4	-2	4	-4	16	8
3	6	-1	1	-2	4	2
4	8	0	0	0	0	0
5	10	1	1	2	4	2
6	12	2	4	4	16	8
20	40		10		40	20

$$S_X = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(x_i-\overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{5}.10} = \sqrt{2}$$

$$S_Y = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(y_i-\overline{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{5}.40} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{S_X . S_Y}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}.20}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{4}{4} = 1$$ الارتباط طردي تام

طريقة اخرى

X	Y	x^2	Y^2	x y
2	4	4	16	8
3	6	9	36	18
4	8	16	64	32
5	10	25	100	50
6	12	36	144	72
20	40	90	360	180

$$S_X = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma x_i^2 - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \times 90 - 16} = \sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma y_i^2 - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \times 360 - 64} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\Sigma x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y}}{S_X \times S_Y}$$

$$r = \frac{\frac{1}{5} \times 180 - 4 \times 8}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$ الارتباط طردي تام





البيانات التالية تمثل الكمية المعروضة من سلعة معينة وسعر الوحدة الواحدة من هذه السلعة .المطلوب حساب معامل الارتباط البسيط بين الكمية المعروضة والسعر .

السعر	x	2	2	5	4	5	6	3	5	4
الكمية المطلوبة	y	3	5	7	8	9	11	6	8	6

الحل

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X_i}{n} = \frac{36}{9} = 4$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma Y_i}{n} = \frac{63}{9} = 7$$

X	y	$x - \bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$y - \bar{y}$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
2	3	–2	4	–4	16	8
2	5	–2	4	–2	4	4
5	7	1	1	0	0	0
4	8	0	0	1	1	0
5	9	1	1	2	4	2
6	11	2	4	4	16	8
3	6	–1	1	–1	1	1
5	8	1	1	1	1	1
4	6	0	0	–1	1	0
36	63		16		44	24

$$S_X=\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{9}\times 16}=\frac{4}{3}$$

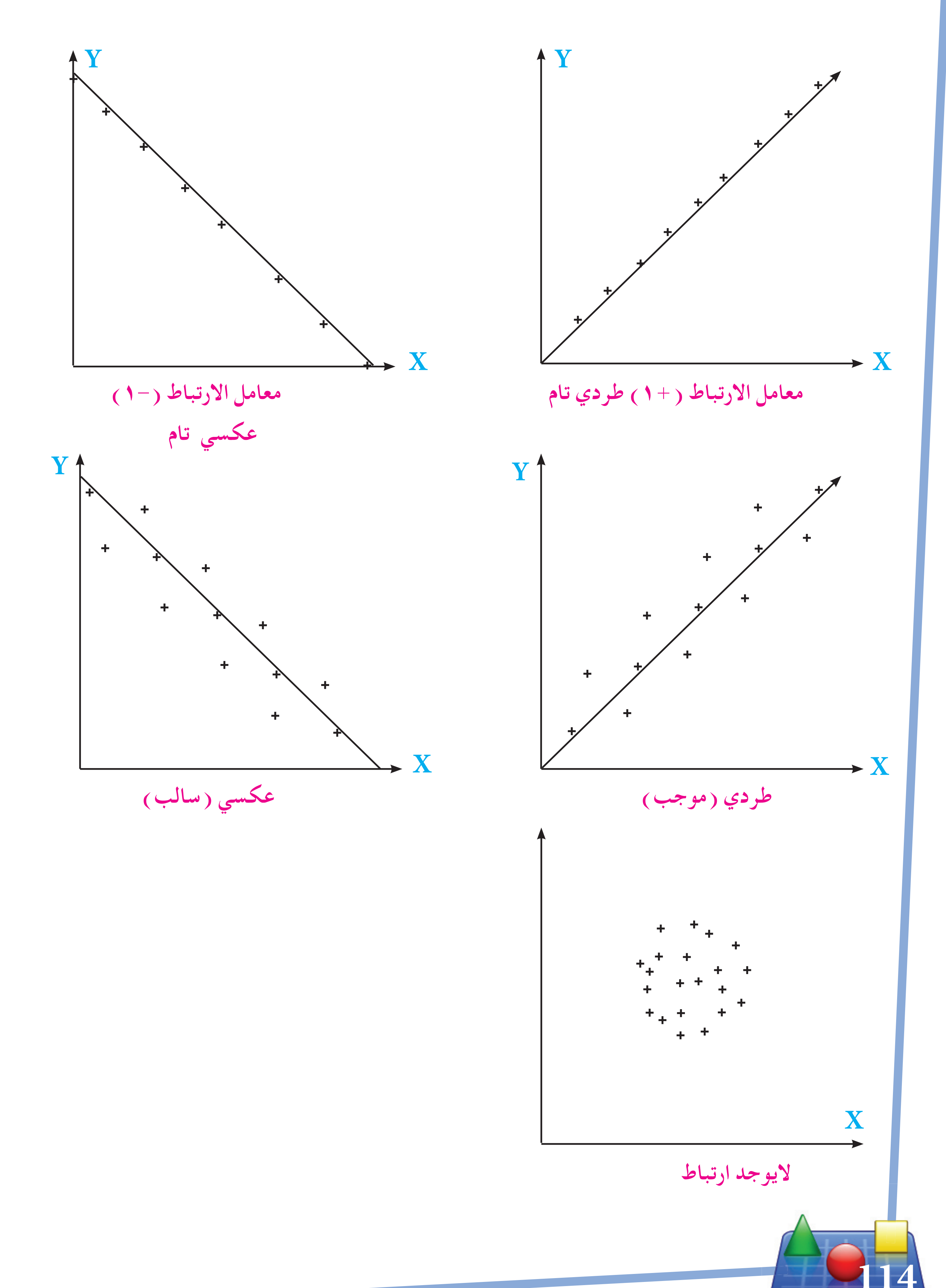
$$S_y=\sqrt{\frac{1}{n}\ \Sigma(y_i-\overline{y})^2}=\sqrt{\frac{1}{9}\times 44}=\frac{\sqrt{44}}{3}$$

$$r=\frac{\frac{1}{n}\ \Sigma(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{(S_X.S_Y)}=\frac{\frac{1}{9}\ .\ 24}{\frac{4}{3}\ .\ \frac{\sqrt{44}}{3}}=\frac{24}{4\sqrt{44}}=0.905$$

وهذا يعني ان درجة الارتباط مابين الكمية المعروضة من هذه السلعة وسعر الوحدة منها هو **0.905** وإنه ارتباط موجب . دلالة على أنه كلما ازداد السعر ازدادت بالمقابل الكمية المعروضة من هذه السلعة .

الشكل الانتشاري

ان الشكل الانتشاري يعتبر أبسط طريقة لعرض بيانات توزيع مزدوج وهوعبارة عن انتشار النقاط في المستوي (X , Y) التي احداثيها السيني يمثل قيمة X واحداثيها الصادي يمثل Y ومن خلال الشكل الانتشاري يمكن تكوين فكرة جيدة عما اذا كان المتغيرين مرتبطين ام غير ذلك . فاذا لاحظنا ان نقاط الشكل الانتشاري متقاربة مع بعضها فاننا نتوقع في هذه الحالة وجود ارتباط جيد بين المتغيرين اما اذا كانت النقاط متباعدة كثيراً فأننا نتوقع ان الارتباط بينهما ضعيف . وكذلك من خلال الشكل يمكن استنتاج نوع الارتباط فيما اذا كان سالب او موجب وتضعف العلاقة اي تنخفض قيمة معامل الارتباط كلما ازداد الانتشار.



Y
X
معامل الارتباط (-١)
عكسي تام
Y
X
معامل الارتباط (+١) طردي تام
Y
X
عكسي (سالب)
Y
X
طردي (موجب)
X
لايوجد ارتباط

[4-4-3] معامل ارتباط سبيرمان (الرتبي)

spearmans coefficient of Rank correltion

لو اراد باحث قياس التكيف الاجتماعي للطلاب قد لايستطيع ذلك وقد لايجد ما يمكنه قياس مثل هذه المتغيرات .ففي هذه الحالة يمكن قياس المتغير بمقياس رتبي كان يستطيع الباحث استطلاع اراء عدد من المعلمين او ممن لهم صلة بافراد العينة

لكي يصنفوا افراد العينة رتبياً على ذلك المتغير فيقال ان (A)اكثر تكيفاً من (B) وهذا اكثر تكيفاً من(C) وهكذا .ويمكن اعطاء (A) المرتبة الاولى في التكيف الاجتماعي بمقارنته مع زملائه .وبنفس الطريقة يعطي (B) المرتبة الثانية و (C) المرتبة الثالثة . كما يمكن ترتيب نفس افراد العينة على متغير اخر غير التكيف الاجتماعي كان يكون الاتجاه نحو المدرسة او مدى نشاط الطالب وفاعليته وقد يرمز (X) للمتغير الاول و(Y) للمتغير الثاني فاذا اراد الباحث التعرف على العلاقة الموجودة بين (X , Y) وهما متغيران رتبياً فانه يستخدم

قانون سبيرمان

ولحساب قيمة معامل الارتباط لسبيرمان نتبع الخطوات التالية :-

1) نرتب كلا المتغيرين X وY تصاعدياً او تنازلياً
2) تحديد الرتب التي تقابل كل قيمة من هذه القيم
3) في حالة اشتراك اكثر من قيمة في مرتبة واحدة تحدد المراتب الجديدة من خلال ايجاد متوسطها
4) حساب الفروق بين رتب كلا المتغيرين X و Y
5) حساب مربع الفروق بين المتغيرين
6) تطبيق قانون معامل الارتباط لسبيرمان

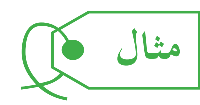
$$r = 1 - \frac{6\Sigma d_i^2}{n(n^2-1)}$$

r = معامل ارتباط سبيرمان

d = X رتب - Y رتب (الفرق بين رتب كلا المتغيرين)

d^2 = مربع الفرق بين المتغيرين

n = عدد ازواج البيانات



كانت تقديرات ستة طلاب في مادة الاحصاء والرياضيات كما يلي :

تقدير درجة الاحصاء : جيد ، متوسط ، ضعيف ، مقبول ، جيد جداً ، ممتاز

تقدير درجة الرياضيات : متوسط ، جيد ، مقبول ، ضعيف ، ممتاز ، جيد جداً

جد معامل الارتباط البسيط بين تقدير الطالب في امتحان الاحصاء وتقديره في امتحان الرياضيات .

الحل

نبدأ بترتيب التقديرات وفق ترتيب تصاعدي او تنازلي وليكن ترتيب تصاعدي ثم نخصص رتباً من الاعداد الطبيعية .

① ② ③ ④ ⑤ ⑥

X : ضعيف ، مقبول ، متوسط ، جيد ، جيد جداً ، ممتاز

Y : ضعيف ، مقبول ، متوسط ، جيد ، جيد جداً ، ممتاز

ثم تعود لتخصيص هذه الرتب والتقديرات الاصلية كما هو موضح في الجدول التالي .

التسلسل	x	y	رتب x	رتب y	d	d^2
1	جيد	متوسط	4	3	1	1
2	متوسط	جيد	3	4	−1	1
3	ضعيف	مقبول	1	2	−1	1
4	مقبول	ضعيف	2	1	1	1
5	جيد جداً	ممتاز	5	6	−1	1
6	ممتاز	جيد جداً	6	5	1	1
						6

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$r = 1 - \frac{6 \times 6}{6(36-1)} = 1 - \frac{6}{35} = 0.829$$ معامل الارتباط طردي قوي



احسب معامل الارتباط بين رتبة النجاح (x) والدخل الشهري (y) لعائلة

x: 80,94,92,66,71,60

y: 700,350,700,400,550,820

الحل

ترتب القيم تصاعدياً

	①	②	③	④	⑤	⑥
x:	60	66	71	80	92	94
y:	350	400	550	700	700	820

$\frac{4+5}{2} = 4.5$

التسلسل	x	y	رتب x	رتب y	d	d^2
1	80	700	4	4.5	-0.5	0.25
2	94	350	6	1	5	25
3	92	700	5	4.5	0.5	0.25
4	66	400	2	2	0	0
5	71	550	3	3	0	0
6	60	820	1	6	-5	25
						50.5

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$r = 1 - \frac{6 \times 50.5}{6(36-1)} = 1 - \frac{50.5}{35} = -0.43$$ معامل الارتباط عكسي لانه سالب

تمارين [2–4]

س1/ جد معامل الارتباط بين y, x من الجدول التالي :

x	1	2	3
y	2	4	6

س2/ جد معامل الارتباط بين y, x

x	4	8	12
y	2	4	6

س3/ جد معامل الارتباط بين y, x

x	3	4	5	6	7
y	6	8	10	12	14

س4/ جد معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين y, x

x	2	5	7	8	6	9	8	10	4	5	11	9
y	1	3	5	6	4	6	7	9	3	4	9	8

س5/ جد معامل الارتباط البسيط للمتغيرين y, x

x	1.5	1.3	2.5	3.3	4.2	1.2	3.8	2.6
y	3	2	4	6	8	1	7	5



س6/ من الجدول التالي جد معامل ارتباط سبيرمان

x : 50,70,80,40,30,60,65,70,75,55

y : 45 ,60,65,30,20,55,60,60,65,50

س7/ البيانات المعطاة في الجدول التالي تمثل الكثافة العددية لاشجار الصنوبر (x) ومساحة قاعدة الاشجار(y)

x : 307,79,71,192,122,404,55,82

y : 13.5,20.1,14.8,19.6,19.5,17.4,26.1,21.1

المطلوب ايجاد معامل ارتباط سبيرمان بين كثافة الاشجار ومساحة قاعدة الاشجار.

الانحدار :

التنبؤ بقيمة متغير معين من معرفة قيمة متغير آخر . فمثلاً يمكننا استخدام الانحدار للتنبؤ بمقدار الدخل القومي (Y) من معرفة مقدار الانتاج الزراعي أو الصناعي (X) لسنة معينة وكذلك يمكننا استخدام نفس الأسلوب للتنبؤ بالدرجات التي يحصل عليها الطالب في الامتحان الوزاري العام (Y) من معرفة درجاته في الامتحان المدرسي (X) وبصورة عامة فانه يمكن التنبؤ بقيمة المتغير (Y) في ضوء معرفة قيمة المتغير (X) باستخدام الانحدار.

ولأجل التنبؤ بمقدار القيم الخاصة بمتغير معين من معرفة قيمة متغير آخر يستخدم عادة أبسط الصور الرياضية وهي الصورة الخطية وتمثل بالمعادلة العامة للخط المستقيم $\hat{y}=bx+a$

وتعني هذه المعادلة إيجاد قيمة (y) المتوقعة والعلامة فوق (y) تدل على إن القيمة (متوقعة او تقديرية) وتساوي قيمة (x) مضروبة في ثابت معين (b) مضافاً إليها ثابت آخر (a) وكما هو ملاحظ إن المعادلة تحتاج الى التعرف على ثلاث قيم (X) ، (a) ، (b) لكي تستطيع التنبؤ بقيمة (Y).

ومن تلك المعادلة ينبغي التعرف على خط الانحدار (Regression line)

ويمكن رسم خط الانحدار بواسطة تحديد نقطتين على الأقل ورسم الخط المستقيم الذي يصل بين تلك النقطتين ولأجل التعرف على قيم النقطتين التي نريد تعيينها ينبغي التعرف على قيم (a) ، (b)

ونحسب قيمة (b) بواسطة القانون التالي:

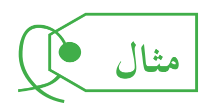
$$b=\frac{n\Sigma x_i y_i-(\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{n\Sigma x_i^2-(\Sigma x_i)^2}$$

ونحسب قيمة (a) كما يأتي:

$$\hat{a}=\bar{y}-b\bar{x}$$

حيث تمثل ($\bar{y}$) الوسط الحسابي لقيم المتغير y وتمثل ($\bar{x}$) الوسط الحسابي لقيم المتغير x ويمكن كتابة المعادلة السابقة :

$$a=\frac{\Sigma y_i}{n}-b\frac{\Sigma x_i}{n}$$



عينة تتألف من سبعة افراد وكانت نتائجهم كما يلي :

x	12	11	5	10	13	13	12
y	11	14	11	13	15	14	12

أحسب معادلة انحدار y على x

الحل

نريد التبؤ بتقدير قيمة (y) أي درجات الآختبار للافراد في الاختبار الثاني من معرفة درجات الاختبار الاول (x) .

x	y	xy	x^2
12	11	132	144
11	14	154	121
5	11	55	25
10	13	130	100
13	15	195	169
13	14	182	169
12	12	144	144
76	90	992	872 المجموع

$$b = \frac{n\Sigma x_i y_i - (\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$$

$$b = \frac{7 \times 992 - 76 \times 90}{7 \times 872 - (76)^2} = \frac{6944 - 6840}{6104 - 5776} = \frac{104}{328} = 0.32$$

$$a = \frac{\Sigma y_i}{n} - b\frac{\Sigma x_i}{n}$$

$$a = \frac{90}{7} - 0.32 \times \frac{76}{7}$$

$$a = 9.38$$

∴ معادلة انحدار (y) على (x)

$$\hat{Y} = b X + a$$
$$\hat{Y} = 0.32 X + 9.38$$

وعندما تكون قيمة (x) مثلا (5) كما هو الحال بالنسبة للفرد الثالث فان درجته المتوقعة في ($\hat{y}$) هي:

$$\hat{Y} = 0.32 \times 5 + 9.38 = 10.98$$

∴ النقطة (5 , 10.98)

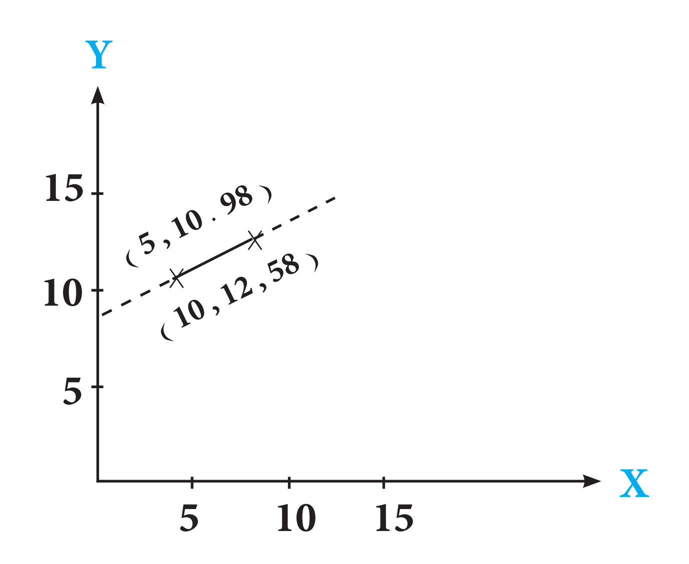
وعندما تكون قيمة (X) مساوية الى (10) بالنسبة للفرد الرابع

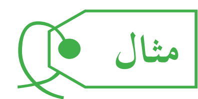
$$Y = 0.32 \times 10 + 9.38 = 12.58$$

∴ النقطة (10 , 12.58)

ولأجل رسم خط الانحدار علينا تعيين النقطتين







البيانات التالية تمثل الكمية المطلوبة من (y) من سلعة معينة وسعر الوحدة الواحدة منها (x) والمطلوب معادلة (y) على (x) :

x	11	8	7	8	6	9	5	5	4	7
y	3	5	6	4	6	4	9	8	9	6

الحل

x	y	xy	x^2
11	3	33	121
8	5	40	64
7	6	42	49
8	4	32	64
6	6	36	36
9	4	36	81
5	9	45	25
5	8	40	25
4	9	36	16
7	6	42	49
70	60	382	530 المجموع

$$b = \frac{n\Sigma x\, y_i - (\Sigma x_i)\,(\Sigma y_i)}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$$

$$b = \frac{10 \times 382 - 70.\ 60}{10 \times 530 - (70)^2} = \frac{3820 - 4200}{5300 - 4900} = \frac{38}{40} = -\ 0.95$$

$$a = \frac{\Sigma y_i}{n} - b\ \frac{\Sigma x_i}{n}$$

$$a = \frac{60}{10} + 0.95\ .\ \frac{70}{10}$$

$$a = 6 + 0.95\ .\ 7 = 6 + 6.65 = 12.65$$

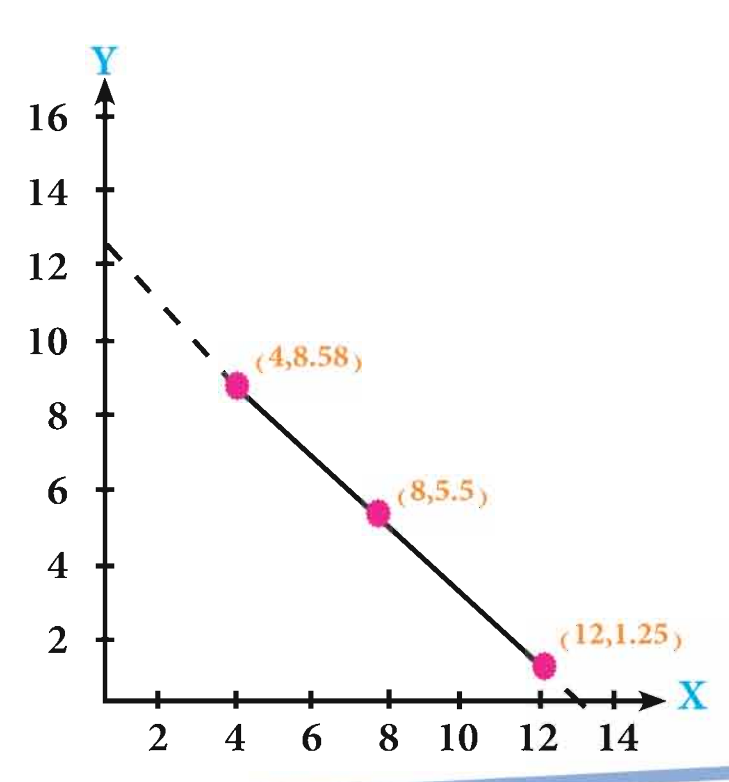
$$\therefore\ \hat{Y} = b\,\hat{X} + a$$

$$\hat{Y} = -\ 0.95\,X + 12.65$$

ولغرض رسم المعادلة أعلاه نختار القيم (X) لنحصل على قيم (Y) من المعادلة :

X : 4 8 12

Y : 8.58 5.5 1.25



تمارين [3ـ4]

س1 / في تجربة حقلية لدراسة أثر زيادة كمية السماد العضوي على كمية المحصول من الحنطة تم الحصول على النتائج التالية :

كمية السماد x	12	10	3	9	4	7	2	5	8	6	8	10
كمية المحصول y	7	6	2	5	2	3	1	2	4	3	5	7

احسب معادلة انحدار كمية المحصول (Y) على كمية السماد (X)

س2 / إذا كان عدد الاهداف التي سجلها فريق بكرة القدم في عشرة مباريات خاضها مع فرق أخرى مقرونة بعدد ضربات الزاوية الممنوحة لهذا الفريق في تلك المباريات كالأتي

عدد ضربات الزاوية x	9	7	8	8	15	4	5	9	6	12
عدد الاهداف y	4	0	1	2	4	0	1	2	2	3

احسب معادلة انحدار عدد الاهداف (y) على عدد ضربات الزاوية (x)

س3 / البيانات التالية تمثل درجات (12) طالب وان درجة الامتحان القصوى من (10) درجات والمطلوب معادلة انحدار (y) على (x)

درجة الرياضيات x	2	3	9	8	7	10	5	6	3	6	0	1
درجة الاحصاء y	0	2	7	7	5	9	3	6	4	4	1	0

جدول المصطلحات

عربي	انكليزي
1- الدالة الاسية	Exponential Function
2- الدالة اللوغارتمية	Logarithmic Function
3- اللوغاريتمات العشرية	Decimal _Logarithms
4- اللوغاريتمات الطبيعية	Natural Logarithms
5- الحاسبة اليدوية	Calculator
6- الوسط الهندسي	Geometric mean
7- المتتابعات	Sequence
8- الاعداد الصحيحة	Integers
9- الاعداد الطبيعية	Natural Numbers
10- الدالة	Function
11- مجال الدالة	Domain
12- المجال المقابل	Codomain
13- الاعداد الحقيقية	Real Numbers
14- المتتابعات العددية (الحسابية)	Arithmetic Sequens
15- الاوساط الحسابية	Arithmetic means
16- المتتابعات الهندسية	Geometric Sequences
17- الاوساط الهندسية	Geametric means
18- المبلغ	Amount
19- السعر	Price
20- الربح	Profit
21- الزمن	Time
22- الجملة	Wholesale
23- القيمة الحالية	Current Value
24- الربح البسيط	Simple profit

جدول المصطلحات

انكليزي	عربي
Compound Profit	25ـ الربح المركب
Finite Sequence	26ـ متتابعة منتهية
Infinite Sequence	27ـ متتابعة غير منتهية
General Term	28ـ الحد العام
Matrices	29ـ المصفوفات
Row	30ـ الصف
Column	31ـ العمود
Order of amatrix	32ـ رتبة المصفوفة
Square Matrix	33ـ المصفوفة المربعة
Zero Matrix	34ـ المصفوفة الصفرية
Unit Matrix	35ـ مصفوفة الوحدة
Singular Matrix	36ـ المصفوفة الاحادية
Addition of Matrix	37ـ جمع المصفوفات
Additive Invers	38ـ النظير الجمعي للمصفوفة
Determinants	39ـ المحددات
Simultaneou Equations	40ـ المعادلات الانية
Measures of Disperssion	41ـ مقاييس التشتت
Standard devintion	42ـ الانحراف المعياري
Correlation	43ـ الارتباط
Linear Correlation	44ـ الارتباط الخطي
Correlation coeffcient	45ـ معامل الارتباط
Regression	46ـ الانحدار

